REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hadj Lakhdar - BATNA 1

Faculté des Sciences de la Matière

Département de Physique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

Diplôme de Doctorat

par:

Mr. Hilal Benkhelil

Thème:

Traitement des systèmes quantiques dans le contexte du formalisme des intégrales de Feynman

Domaine	: *Sciences de la Matière*
Filière	: *Physique*
Spécialité	: *Matière, Rayonnement et Astrophysique*

Soutenue le: *09 /06 / 2022*

Devant le jury:

Président:	Abdelaziz Sid	Professeur	Université de Batna 1
Rapporteur:	Mekki Aouachria	Professeur	Université de Batna 1
Examinateurs:	Yazid Delenda	Professeur	Université de Batna 1
	Mahmoud Merad	Professeur	Université de OEB
	Kamel Khounfais	Professeur	Université de Skikda

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère

À la mémoire de mon cher père

À mes chers frères et sœurs

À toutes les personnes qui me respectent et qui m'aiment

Remerciements

الحمد لله

La réalisation de cette thèse a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur Mekki Aouachria. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je remercie en avance l'ensemble des membres du jury pour leurs participations, leurs critiques et leurs remarques. Un Grand merci à Mr A. Sid, Mr Y. Delenda, Mr M. Merad et Mr K. Khounfais, avec ma plus grande reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions durant mes recherches. Un grand merci à Mr A. Merdaci, pour le temps qu'il a bien voulu accorder à mes travaux, son soutien m'a été très précieux.

Enfin, je remercie vivement tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de cette thèse, même par un petit sourire d'encouragement.

Sommaire

Introduction générale

Tel que c'est connu, la mécanique quantique est l'outil fondamental pour décrire le comportement de la matière (et de la lumière) aux échelles atomique et subatomique. Cette mécanique a été construite sur la base d'une analogie avec la théorie Hamiltonienne de la mécanique classique. La raison réside dans le fait que la notion classique de coordonnées et d'impulsions canoniques comporte un analogue quantique très simple.

Il existe aussi une formulation alternative de la dynamique classique obtenue à partir du Lagrangien. Celle-ci exige de considérer les coordonnées et les vitesses plutôt que les coordonnées et l'impulsion. Bien évidemment il existe de fonts lieus entre les deux formalismes mais il y a des raisons de croire que le formalisme du Lagrangien est le plus fondamental.

La mécanique quantique a commencé avec deux formulations mathématiques tout à fait différentes: l'équation différentielle de Schrödinger [1] et l'algèbre des matrices de Heisenberg et de Dirac [2-5]. Les deux approches, apparemment dissemblables, sont mathématiquement équivalentes. Ces deux points de vue sont en fait complémentaires et ont été unifiés dans le cadre de la théorie de la transformation de Dirac.

Une autre formulation de la mécanique quantique est donnée par R.P.Feynman [6-8] en 1942 dans sa thèse portant sur la formulation de la mécanique quantique à partir du Lagrangien du système, en voulant quantifier la nouvelle formulation de l'électrodynamique basée sur "Le principe de moindre action", que Feynman et son directeur de thèse Wheeler ont essayé de développer, il a essayé de trouver une méthode de quantification basée sur le Lagrangien pour décrire un système, et cela en utilisant l'idée de Dirac [9] dans lequel il avait suggéré que la fonction de transformation, communément connue comme le propagateur, est analogue à $exp(iS/\hbar)$ où S est la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi.

L'intégrale de chemin est une méthode générale qui permet d'exprimé les probabilités de transition en mécanique quantique, et plus généralement les fonctions de corrélation en mécanique statistique et les propagateurs en théorie quantique des champs. La conception essentielle dans cette approche est le propagateur qui contient toutes les informations sur le système. Ce propagateur est une somme de contributions de tous les chemins, le principe de la superposition se manifeste déjà dans cette formulation, on peut dire sans exagérer qu'elle est concurrente à d'autre méthodes de quantification. Se basant essentiellement sur les notions simples et connus de la mécanique classique comme les chemins (trajectoires), l'action, le Lagrangien, ..., il permet de décrire de manière élégante l'évolution des systèmes.

Cependant, des difficultés restent encore et soulèvent leur contestation face à ce formalisme. Le spin, n'est pas encore trouvé sa solution définitive dans le cadre des intégrales de chemin. Sa nature exclusivement discrète rend sa description difficile au moyen du chemin qui par essence sont continue. Ceci pose un vrai problème de formulation. En fait, il a eu plusieurs tentatives de formulation des intégrales de chemin pour le spin, citons par exemple, le modèle bosonique ou fermionique de Schwinger [10-12] et le modèle des variables anticommutantes dites de Grassmann [13,14]. Du point de vue pédagogique, des solutions pour des interactions combinant le spin et d'autres variables par le formalisme des intégrales de chemin ont été traités [15-22] en utilisant le modèle fermionique ou bosonique de Schwinger.

Par ailleurs, d'autres difficultés mathématiques nous rencontrons lors de l'étude des systèmes quantique dépendant du temps. Par l'approche qu'on appelle "Série de perturbation" qui est, importante pour le formalisme intégrale de Feynman, le propagateur est exprimé par une série de perturbations qui n'a pas été évalué pour tous les ordres. Beaucoup d'auteurs travaillent dans ce sens, pour ne citer que les traveaux de Boudjedaa et al [15,16], les séries de perturbation ont été sommées dans des cas particuliers stationnaires (interaction indépendante du temps), en utilisant la transformation de Laplace et le théorème de convolution. Malheureusement, cette méthode n'est pas efficace dans le cas des intéractions dépendantes du temps. Pour cette raison, on va présenter une autre alternative pour résumer les séries de perturbation en traitant telles systèmes.

Le présent travail concerne principalement la maîtrise des techniques de l'intégrale de chemin à travers de l'étude des systèmes dynamiques intéressant la mécanique quantique et la physique optique.

Cette thèse se compose essentiellement de quatre chapitres:

On commence par des rappels sur les états cohérents et la construction intégrale de chemin correspondante comme un premier chapitre. Le deuxième chapitre est consacré au traitement des systèmes quantiques à deux niveaux dans les intéractions dépendante du temps. Après avoir une représentation férmionique pour le propagateur, l'intégration sur les variables de spin est facile à réaliser, pour arriver, à la fin, à déduire les probabilités de transition. Nous poursuivrons dans le troisième chapitre par la présentation fermionique du formalisme des intégrales de chemin pour analyser l'intéraction entre un champ magnétique dépendant du temps et particule à deux niveaux, puis les probabilités de transition correspondantes sont déduites. Le quatrième chapitre, concerne l'étude de modèle Jaynes-Cummings généralisée dans les cas d'intéraction dépendante du temps. Nous déterminerons exactement les propagateurs correspondants en suivant la méthode de perturbation en réprésentation des états cohérent bosonique et fermioniques et nous déduisons en plus les fonctions d'onde.

Chapitre 1: Formalisme intégrale de chemin en représentation des états cohérents

1.1. Introduction

Les états cohérents ont été étudiés pour la première fois par Schrödinger en 1926 et ont été redécouverts par Klauder, Glauber et Sudarshan au début des années 1960 [23], puis ils ont été généralisés par Perelomov [24]. L'introduction de ces états cohérents dans le formalisme des intégrales de chemin au moyen des états cohérents de type fermioniques et bosoniques ont été faits par divers auteurs comme Ohniki et Kashiwa [13] et Klauder [14]. Récemment, une formulation plus satisfaisante basée sur les états cohérents fermioniques a été faite par Nakamura et Kitahara [25].

De nos jours, les états cohérents jouent un rôle important dans différents domaines de la physique, particuliéremet en optique quantique. Par exemple la dynamique du spin et le champ produit par un laser, sont décrits par des états cohérents.

Comme le thème concerne essentiellement les interactions spin-champ, dans ce qui suit, on passe en revue les propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique et de spin via le modèle de Schwinger, et la construction du propagateur sur ces états.

1.2. Etats cohérents d'un oscillateur harmonique et de spin

Soit un système régi par l'Hamiltonien:

$$\hat{H} \equiv \hat{H}(a, a^{\dagger}), \tag{1.1}$$

où a et $a^{\dagger}$ sont des opérateurs de création et d'annihilation qui dans le cas générale peuvent être des opérateur bosoniques ou fermioniques.

Dans le but de construire une intégrale de chemin relative à ce système, introduisons les états cohérents bosoniques (ou fermioniques) qui sont définis comme états propres de l'opérateur d'annihilation a bosonique (ou fermionique), ie, $a|Z\rangle = Z|Z\rangle$ (bosonique), $a|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle$ (fermionique) où Z est un variable complexe et ψ une variable de Grassmann impaire.

Ces états cohérents satisfont les propriétés suivantes:

- pour les variables complexes:

$$\begin{cases} \int \frac{d\bar{Z}dZ}{2\pi i} |Z\rangle\langle Z| = 1 \\ |Z\rangle = e^{-\frac{|Z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ \langle Z_i | Z_{i-1}\rangle = exp\ (-\frac{|Z_i|^2}{2} - \frac{|Z_{i-1}|^2}{2} + \bar{Z}_i Z_{i-1}) \\ \int e^{-\bar{Z}AZ} d\bar{Z}dZ = (det\ A)^{-1} \end{cases} \tag{1.2}$$

- pour les variables de Grassmann:

$$\begin{cases} \int d\bar{\psi} d\psi e^{-\bar{\psi}\psi} |\psi\rangle\langle\psi| = 1 \\ |\psi\rangle = e^{-\psi a^\dagger} |0\rangle \\ \langle\psi_i|\psi_{i-1}\rangle = exp\ (\bar{\psi}_i\psi_{i-1}) \\ \int d\bar{\psi} d\psi e^{-\bar{\psi}A\psi} = det\ A \end{cases} \tag{1.3}$$

1.3. La représentation intégrale de chemin

L'amplitude de transition de l'états initial $|\eta_i\rangle$ (état cohérent) à l'instant $t_i = 0$ vers l'états final $|\eta_f\rangle$ à $t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'operateur d'évolution du temps:

$$K(\eta_f, \eta_i; T) = \langle\eta_f|U(T,0)|\eta_i\rangle, \tag{1.4}$$

où η peut être un état cohérent bosonique ou fermionique, et:

$$U(T,0) = T_D\ exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H(a,a^\dagger;t)dt), \tag{1.5}$$

où T_D est l'opérateur chronologique de Dyson. Pour passer à la représentation Path-integral subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N+1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \to \infty$. Ainsi, à l'aide de la formule de Trotter, on trouve:

$$K(\eta_f, \eta_i; T) = \lim_{N\to\infty} \langle\eta_f|(e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(a,a^\dagger;t)})^N|\eta_i\rangle. \tag{1.6}$$

Dans la suite nous faisons une construction explicite du propagateur $K(Z_f, Z_i; T)$ en représentation bosonique puis nous la généralisons pour les fermions. Nous introduisons les relations de fermétures entre chaque paire de $U(\varepsilon)$ aux instant $t_1, t_2, ..., t_N$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int |Z_n\rangle\langle Z_n| d\bar{Z}_n dZ_n = 1. \tag{1.7}$$

Le propagateur $K(Z_f, Z_i; T)$ s'écrit sous la forme:

$$K(Z_f, Z_i; T) = \lim_{N\to\infty}\int ..\int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\bar{Z}_n dZ_n}{2\pi i} \prod_{n=1}^{N+1} \langle Z_n|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(a,a^\dagger;t)}|Z_{n-1}\rangle. \tag{1.8}$$

En evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.8) en premier ordre en ε comme suit:

$$\begin{aligned}\langle Z_n | e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(a,a^\dagger;t)} | Z_{n-1}\rangle &= \langle Z_n | 1 - i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(a,a^\dagger;t) | Z_{n-1}\rangle \\ &= \langle Z_n | Z_{n-1}\rangle \left[1 - i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\langle Z_n | H(a,a^\dagger;t) | Z_{n-1}\rangle}{\langle Z_n | Z_{n-1}\rangle}\right] \\ &= \langle Z_n | Z_{n-1}\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(Z_{n-1},Z_n^*)},\end{aligned} \tag{1.9}$$

avec

$$H(Z_{n-1}, Z_n^*) = \frac{\langle Z_n | H(a,a^\dagger;t) | Z_{n-1}\rangle}{\langle Z_n | Z_{n-1}\rangle}, \tag{1.10}$$

et le produit de deux états cohérents est donné par la relation (1.2). Dans ce cas le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante:

$$K(Z_f, Z_i; T) = \lim_{N\to\infty} \int .. \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d\bar{Z}_n dZ_n}{2\pi i}\ exp\left\{ i\frac{\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{i}{2}\left(\bar{Z}_n\frac{\Delta Z_n}{\varepsilon} - Z_n\frac{\Delta\bar{Z}_n}{\varepsilon}\right) - H(Z_{n-1}, \bar{Z}_n)\right]\right\}. \tag{1.11}$$

A la limite continue on obtient l'expression du propagateur dans la représentation des états cohérénts bosonique:

$$K(Z_f, Z_i; T) = \int DZ\ exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\left[\frac{i}{2}(\bar{Z}\dot{Z} - Z\dot{\bar{Z}}) - H(Z,\bar{Z})\right]\right\}, \tag{1.12}$$

avec

$$DZ = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\bar{Z}_n dZ_n}{2\pi i}. \tag{1.13}$$

En final, une simple généralisation de cette construction donne la forme de l'intégrale de chemin en représentation des états cohérents (bosonique ou fermionique) s'écrivant comme suit:

$$K(\eta_f, \eta_i; T) = \int D\bar{\eta}D\eta\ exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left[\left(\frac{i}{2}(\bar{\eta}\dot{\eta} + k\eta\dot{\bar{\eta}}) - H(\eta,\bar{\eta};t)\right)\right]\right\}, \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} k = -1 & pour\ \ les\ \ bosons, \\ k = +1 & pour\ \ les\ \ fermions. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, ces deux expressions de l'intégrale de chemin vont être combinées dans les systèmes qui seront considérés en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressent.

Chapitre 2: Les systèmes quantiques à deux niveaux dépendants du temps

2.1. Introduction

L'un des sujets de grande importance en physique quantique est le traitement des systèmes quantique dépendant du temps, comme l'intéraction d'un atome avec un champ éléctromagnétique dépendant du temps. Pour les systèmes à deux niveaux, dont l'évolution est décrite par l'équation de type Pauli, la formule du champ est d'écrit en termes de deux fonctions du temps correspondant à l'enveloppe et à la fréquence de désaccord. Le système à deux niveaux a été utile dans la modélisation des phénomènes dans les collisions atomiques [26], la spectroscopie laser [27], la résonance magnétique [28] et la dynamique dans les environnements dissipatifs [29].

Cependant, pour ce type d'interaction, les solutions exactes ne sont disponibles que pour les champs tournants celle a été résolu par Rabi [30], est celui où l'enveloppe et la fréquence de désaccord sont des fonctions constantes. D'autres classes ont également été traitées, ne citer que les traveaux de Tahmasebi et Sobouti [31], où l'enveloppe est constant et la fréquence de désaccord est dépendante du temps. La solution avec enveloppe Hyperbolique-secant et fréquence de désaccord constante a été obtenue par Rosen et Zener [26]. Puis Hioe a trouvé une solution pour le cas d'une modulation de fréquence dépendante du temps [32].

Dans ce chapitre, on présente une étude des systèmes quantique à deux niveaux dépendant du temps par la téchnique des intégrales de chemin. Dans une première étape nous formulons le propagateur en utilisant la representation des états cohérents fermioniques pour décrivons la dynamique de spin par des variables de Grassmann impaires. Le problème se réduit alors au calcul du propagateur relatif par la série de perturbation. Finalement, nous considérons des exemples explicites pour illustrer la méthode, a fin de déduire les probabilités de transition.

2.2. La représentation intégrale de chemin d'un système à deux niveaux

Pour établir l'intégrale de chemin relatif au problème qui nous intéresse, considérons une particule à deux niveaux placée dans un champ arbitraire dépendant du temps décrit par l'Hamiltonien:

$$H(t)=\begin{pmatrix} -w(t) & -v(t) \\ -v^{*}(t) & w(t) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

où $w(t)$ et $v(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps correspondantes à l'enveloppe et à la fréquence de désaccord.

2.2.1. Formulation du propagateur

Pour pouvoir construire l'intégrale du chemin correspondante à ce modèle, introduisons d'abord le modèle fermionique de spin dû à Schwinger. Nous remplaçons les matrices de Pauli σ_i par une paire d'opérateur fermioniques (u,d) suivant la recette:

$$\sigma_i = \left(u^\dagger, d^\dagger\right)\sigma_i\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Les opérateurs fermioniques verifient les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} u^\dagger\left|0\right\rangle = \left|\uparrow\right\rangle, d^\dagger\left|0\right\rangle = \left|\downarrow\right\rangle, \\ u\left|0\right\rangle = 0, d\left|0\right\rangle = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ainsi, d'après (2.2), l'Hamiltonien prend la forme fermionique suivante:

$$H(t) = -w(t)(u^\dagger u - d^\dagger d) - v(t)u^\dagger d - v^*(t)d^\dagger u. \tag{2.4}$$

La construction de l'intégrale de chemin du propagateur suit en introduisant l'état cohérent fermionique$\left|\alpha,\beta\right\rangle$ où (α,β) sont des variables de Grassmann dont les propriétés sont données par (1.3). On définit alors le propagateur entre l'état $\left|\alpha_i,\beta_i\right\rangle$ à l'instant $t_i = 0$ à l'état $\left|\alpha_f,\beta_f\right\rangle$ à l'instant $t_f = T$ par les éléments matriciels de l'opérateur d'évolution temporelle:

$$K(f,i;T) = \left\langle \alpha_f,\beta_f\left|U(t)\right|\alpha_i,\beta_i\right\rangle, \tag{2.5}$$

où

$$U(t) = T_D\, exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H(t)dt\right), \tag{2.6}$$

avec T_D est l'operateur chronologique de Dyson.

En utilisant la formule de Trotter et l'approximation du temps infinitésimal $\varepsilon = T/(N+1)$pour l'élément de matrice$\left\langle \alpha_n,\beta_n\left|e^{-i\varepsilon H(t_n)}\right|\alpha_{n-1},\beta_{n-1}\right\rangle$, nous obtenons la forme Hamiltonienne suivante de l'intégrale de chemin:

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\left\langle \alpha_f,\beta_f\left|\left(e^{-i\varepsilon H(t_n)}\right)^{N+1}\right|\alpha_i,\beta_i\right\rangle, \tag{2.7}$$

et à ce niveau, nous insérons à chaque $t_n = (n+1)\varepsilon$ la relation de fermeture relative à la base$\left\{\left|\alpha_n,\beta_n\right\rangle\right\}$, il vient:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}&\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n} \\ &\times\prod_{n=1}^{N+1}\left\langle \alpha_n,\beta_n\left|e^{-i\varepsilon H(t_n)}\right|\alpha_{n-1},\beta_{n-1}\right\rangle, \end{aligned} \tag{2.8}$$

les éléments de matrice se calculent aisément et le résultat:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}&\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n} \\ &\times\prod_{n=1}^{N+1} exp\left(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n\right)R(t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec

$$R(t_n) = e^{i\varepsilon w(t_n)\sigma_z} + i\varepsilon Q(t_n), \tag{2.10}$$

où

$$Q(t_n) = \begin{pmatrix} 0 & v(t_n) \\ v^*(t_n) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Maintenat, passons à l'intégration sur toute les variables de Grassmann (α_n, β_n), ainsi le propagateur prend la forme suivante:

$$K(f,i;T) = exp\left(\bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f\right) R(T) \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

où la matrice $R(T)$ et donnée par:

$$R(T) = \lim_{N\to\infty} (-1)^N \prod_{\substack{n=1 \\ \leftarrow}}^{N+1} R(t_n). \tag{2.13}$$

Le produit ordonné $R(T)$ peut se développer en la série de perturbation suivant [15], à la limite continue $(N \to +\infty)$ la série devient:

$$\begin{aligned} R(T) &= e^{i\int_0^T dtw(t)\sigma_z} + i\int_0^T dt_1 e^{i\int_{t_1}^T dtw(t)\sigma_z} K(t_1) e^{i\int_0^{t_1} dtw(t)\sigma_z} \\ &+ (i)^2 \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i\int_{t_1}^T dtw(t)\sigma_z} K(t_1) e^{i\int_{t_2}^{t_1} dtw(t)\sigma_z} K(t_2) e^{i\int_{t_3}^{t_2} dtw(t)\sigma_z} \\ &+ \ldots + (i)^N \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{N-1}} dt_N e^{i\int_{t_1}^T dtw(t)\sigma_z} K(t_1) e^{i\int_{t_2}^{t_1} dtw(t)\sigma_z} \\ &K(t_2) e^{i\int_{t_3}^{t_2} dtw(t)\sigma_z} K(t_3) \ldots K(t_{N-1}) e^{i\int_{t_N}^{t_{N-1}} dtw(t)\sigma_z} K(t_N) e^{i\int_0^{t_N} dtw(t)\sigma_z} + \ldots \end{aligned} \tag{2.14}$$

Les éléments de matrice de $R(T)$ sont:

$$\begin{aligned} R_{11}(T) = R_{22}^*(T) = e^{i\int_0^T dtw(t)\sigma_z} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[i^{2n} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \\ \times e^{+i\int_{t_1}^T dtw(t)} v(t_1) e^{-i\int_{t_2}^{t_1} dtw(t)} v^*(t_2) \ldots e^{+i\int_{t_{2n}}^{t_{2n-1}} dtw(t)} v^*(t_{2n}) e^{-i\int_0^{t_{2n}} dtw(t)} \Big], \end{aligned} \tag{2.15}$$

et

$$R_{12}(T) = -R_{21}^*(T) = i\int_0^T dt_1 e^{+i\int_{t_1}^T dtw(t)} v(t_1) R_{11}^*(t_1), \tag{2.16}$$

dont les éléments matriciels définissent l'amplitude de transition entre les états propres du spin d'après (1.3). Finalement, le propagateur $K(f,i;T)$ prend la forme:

$$K(f,i;T) = exp\left\{ \left(\bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f\right) \begin{pmatrix} R_{11}(T) & R_{12}(T) \\ R_{21}(T) & R_{22}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.17}$$

Ce propagateur perturbatif constitue notre résultat principal, qui a fait l'objet de l'article [15]. Dans ce qui suit, on va appliquer les calculs sur les séries de perturbations aux intéractions dépendante du temps. Mais avant, on va extraire l'expression générale de la probabilité de transition correspondante.

2.2.2. Les probabilités de transition

Dans le but de déterminer les probabilités de transition correspondantes aux systèmes considérés, calculons d'abord l'amplutide de transition entre les états propres de spin, en prenant à titre d'exemple le calcul de l'élement de la matrice $K(\uparrow,\uparrow;T)$ où:

$$K(\uparrow,\uparrow;T)=\left\langle\uparrow\left|U(T)\right|\uparrow\right\rangle. \tag{2.18}$$

Introduisant ici les relations de fermetures, l'amplitude devient:

$$\begin{aligned}K(\uparrow,\uparrow;T)=&\int d\bar{\alpha}_f d\alpha_f d\bar{\beta}_f d\beta_f d\bar{\alpha}_i d\alpha_i d\bar{\beta}_i d\beta_i\\ &\times e^{-\bar{\alpha}_f\alpha_f-\bar{\beta}_f\beta_f}e^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i-\bar{\beta}_i\beta_i}\\ &\times\left\langle\uparrow\left|\alpha_f,\beta_f\right.\right\rangle\left\langle\alpha_i,\beta_i\left|\uparrow\right.\right\rangle K(f,i;T),\end{aligned} \tag{2.19}$$

puis:

$$\begin{aligned}K(\uparrow,\uparrow;T)=&\int d\bar{\alpha}_f d\alpha_f d\bar{\beta}_f d\beta_f d\bar{\alpha}_i d\alpha_i d\bar{\beta}_i d\beta_i\\ &\times e^{-\bar{\alpha}_f\alpha_f-\bar{\beta}_f\beta_f}e^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i-\bar{\beta}_i\beta_i}\left\langle\uparrow\left|\alpha_f,\beta_f\right.\right\rangle\left\langle\alpha_i,\beta_i\left|\uparrow\right.\right\rangle\\ &\times exp\left\{\left(\bar{\alpha}_f,\bar{\beta}_f\right)\begin{pmatrix}R_{11}(T) & R_{12}(T)\\ R_{21}(T) & R_{22}(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Grâce aux caractéristiques de Réf [25], avec:

$$\left\langle\uparrow\left|\alpha_f,\beta_f\right.\right\rangle=\alpha_f,\left\langle\alpha_i,\beta_i\left|\uparrow\right.\right\rangle=\bar{\alpha}_i \quad et \quad \alpha_f\bar{\alpha}_i=e^{-\bar{\alpha}_i\alpha_f}-1, \tag{2.21}$$

l'expression de $K(\uparrow,\uparrow;T)$ prend la forme suivante:

$$K(\uparrow,\uparrow;T)=\int d\upsilon^\dagger d\upsilon\left[exp\ \upsilon^\dagger D'\upsilon-exp\ \upsilon^\dagger D\upsilon\right], \tag{2.22}$$

où les matrices D and D' sont:

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1\end{pmatrix} \quad et \quad D'=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1\end{pmatrix} \tag{2.23}$$

avec R_{nm} les éléments matriciels de R, et:

$$\upsilon = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_f \\ \beta_i \\ \beta_f \end{pmatrix}, \qquad \upsilon^\dagger = \left(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_i, \bar{\beta}_f\right), \tag{2.24}$$

sont des vecteurs regroupant les variables de Grassmann.

Donc l'intégration sur les variables de Grassmann est simple:

$$K(\uparrow,\uparrow;T) = det\ D' - det\ D. \tag{2.25}$$

Maintenant, depuis $det\ D' = 1 + R_{11}$ et $det\ D = 1$, l'élément de matrice de propagateur pour les états up-up est finalement écrit:

$$K(\uparrow,\uparrow;T) = R_{11}(T). \tag{2.26}$$

De même, on trouve pour les autres éléments des formules analogues. D'après les propriétés des états cohérents fermionique nous pouvons écrire le propagateur sous la forme matricielle suivante:

$$K(m_i, m_f; T) = \begin{pmatrix} R_{11}(T) & R_{12}(T) \\ R_{21}(T) & R_{22}(T) \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Par définition, la probabilité de transition de l'état initial $|\uparrow\rangle$ à l'état final $|\downarrow\rangle$ est donnée par:

$$P_{\downarrow\uparrow} = \left|R_{21}(T)\right|^2. \tag{2.28}$$

Après avoir obtenu les expressions relatives aux propriétés physiques intéressantes. Dans ce qui suit nous traiterons explicitement des exemples pour illustrer la méthode.

2.3. Applications sur les intéractions dépendante du temps

Dans cette section, nous considérerons des cas particuliers. La série de perturbations se résumera exactement. Le résultat explicite du propagateur est directement calculé et la probabilité de transition est ensuite déduite.

2.3.1. Application 1: la fréquence variable et l'enveloppe constant

La première application qui nous considérons est le cas où la fréquence de désaccord est dépendante du temps et l'enveloppe est constant, tel que:

$$w(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} cot\left(\frac{s(t)}{\sqrt{2}}\right) \quad et \quad v(t) = -\frac{i}{2}, \tag{2.29}$$

avec

$$s(t) = \sqrt{2}\ cot^{-1}(ae^{-\lambda t}). \tag{2.30}$$

Ce choix correspondant au champ magnétique suivant [17],[31]:

$$B(t) = B\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}ae^{-\lambda t}}{1+a^2e^{-2\lambda t}} \\ \dfrac{a^2e^{-2\lambda t}}{1+a^2e^{-2\lambda t}} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

avec: $\lambda = gB$, g : est le rapport gyromagnétique, et $a = cot^{-1}\left(\pi/\sqrt{2}\right)$.

Les éléments de matrice $R(T)$ dans ce cas sont donnés par:

$$R_{11}(T) = R_{22}^{*}(T) = e^{i\int_0^S ds\frac{1}{2\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})\sigma_z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{1}{2})^{2n}\int_0^S ds_1\int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} \right.$$
$$\left. \times e^{+i\int_{s_1}^S ds\frac{1}{2\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})} e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\frac{1}{2\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})} ... e^{-i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds\frac{1}{2\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})} e^{+i\int_0^{s_{2n}} ds\frac{1}{2\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})}\right], \tag{2.32}$$

et

$$R_{12}(T) = -R_{21}^{*}(T) = -\frac{1}{2}\int_0^S ds_1 e^{+i\int_{s_1}^S ds\frac{1}{2\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})} R_{11}^{*}(s_1). \tag{2.33}$$

Maintenant, nous avons:

$$R_{11}(T) = \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2n}\int_0^S ds_1 e^{+\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_1}{\sqrt{2}})}\int_0^{s_1} ds_2 e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_2}{\sqrt{2}})} ... \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_{2n}}{\sqrt{2}})}\right] e^{+\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{S}{\sqrt{2}})}. \tag{2.34}$$

Dans ce qui suit, on va montrer la manière dont la série de perturbations dans l'élément $R_{11}(T)$ sera résumée. En premier, nous mettons:

$$G_{11}(S) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n F_n(s), \tag{2.35}$$

où

$$F_n(s) = \int_0^S ds_1 e^{+\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_1}{\sqrt{2}})}\int_0^{s_1} ds_2 e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_2}{\sqrt{2}})} ... \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_{2n}}{\sqrt{2}})}. \tag{2.36}$$

Ce qui peut réecrire comme suit:

$$F_n(s) = \int_0^S ds_1 e^{+\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_1}{\sqrt{2}})}\int_0^{s_1} ds_2 e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s_2}{\sqrt{2}})} F_{n-1}(s_2). \tag{2.37}$$

On pourra, alors, facilement vérifier que la série $F_n(s)$, satisfait l'équation différentielle non homogène suivante:

$$\frac{d^2}{ds^2}F_n(s) + \frac{i}{\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{d}{ds}F_n(s) = F_{n-1}(s), \tag{2.38}$$

où les séries $F_n(s)$ satisfonts à la formule de récurrence suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n F_{n-1}(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^{n+1}F_n(s) = \frac{1}{4}F_0(s) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n F_n(s), \tag{2.39}$$

avec $F_0(s)=1$. Alors de (2.35) et (2.38), nous constatons que $G_{11}(T)$ doit satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2}{ds^2}G_{11}(s)+\frac{i}{\sqrt{2}}cot(\frac{s}{\sqrt{2}})\frac{d}{ds}G_{11}(s)+\frac{1}{4}G_{11}(s)=-\frac{1}{4}. \tag{2.40}$$

La solution de l'équation (2.40) sous les conditions initiale $G_{11}\left(s(0)\right)=0, G_{11}^{/}\left(s(0)\right)=0$ est donnée par:

$$G_{11}(S)=\frac{1}{cos(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}h(s)sin(\frac{s}{2\sqrt{2}})-\frac{dh(s)}{ds}cos(\frac{s}{2\sqrt{2}})\right]e^{\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s}{\sqrt{2}})}-1, \tag{2.41}$$

où

$$h(s)=\frac{cos^2(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}{e^{iln\ tan(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}}\int_{\pi}^{s}\frac{e^{iln\ tan(\frac{\tau}{2\sqrt{2}})}}{cos^2(\frac{\tau}{2\sqrt{2}})}d\tau. \tag{2.42}$$

Finalement, on peut voir que $R_{11}\left(T\right)$ sous la forme suivante:

$$R_{11}(T)=\frac{1}{cos(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}h(s)sin(\frac{s}{2\sqrt{2}})-\frac{dh(s)}{ds}cos(\frac{s}{2\sqrt{2}})\right]e^{+\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s}{\sqrt{2}})}, \tag{2.43}$$

un calcul semblable (ou bien utilisant les relations (2.15) et (2.16)) nous permet d'obtenir les autres éléments:

$$R_{12}(T)=\frac{cos(\frac{s}{2\sqrt{2}})}{2cos(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}h(s)e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s}{\sqrt{2}})}, \tag{2.44}$$

$$R_{21}(T)=\frac{cos(\frac{s}{2\sqrt{2}})}{2cos(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}h^*(s)e^{+\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s}{\sqrt{2}})}, \tag{2.45}$$

$$R_{22}(T)=\frac{1}{cos(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}h^*(s)sin(\frac{s}{2\sqrt{2}})-\frac{dh^*(s)}{ds}cos(\frac{s}{2\sqrt{2}})\right]e^{-\frac{i}{2}ln\ sin(\frac{s}{\sqrt{2}})}. \tag{2.46}$$

Le résultat de la probabilité de transition dans ce cas est:

$$P_{\downarrow\uparrow}=\frac{1}{4}\frac{\cos^2(\frac{s}{2\sqrt{2}})}{\cos^2(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})}\left|h(s)\right|^2. \tag{2.47}$$

Ce résultat est en accord avec ceux obtenus par résolution directe de l'équation de Schrödinger [31] et par les intégrales de chemin utilisant la technique de la transformation dans l'espace des états cohérent [17].

2.3.2. Application 2: la fréquence constante et l'enveloppe variable

Comme une deuxiéme application, considérons le cas où l'enveloppe est dépendant du temps et la fréquence de désaccord est constante:

$$w(t)=0 \quad et \quad v(t)=\frac{\Omega_0}{2}D(t)e^{i\Delta t}, \tag{2.48}$$

où $\Delta=\omega_0-\omega$ est la fréquence de désaccord entre la fréquence de transition ω_0 et la fréquence de champ ω, Ω_0 est la fréquence de Rabi. $D(t)$ est un enveloppe complexe du champ: $D(t)=g(t)e^{ik(t)}$, où $g(t)$ et $k(t)$ sont des fonctions réel. Ainsi $g(t)$ décrit la modulation d'amplitude et $k(t)$ la modulation de fréquence de l'impulsion.

Pour ce cas, les éléments de matrice $R(T)$ donnés par:

$$R_{11}(T)=R_{22}^*(T)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(i\frac{\Omega_0}{2})^{2n}\int_0^T dt_1 g(t_1)e^{+i[k(t_1)+\Delta t_1]}$$
$$\times\int_0^{t_1} dt_2 g(t_2)e^{-i[k(t_2)+\Delta t_2]}...\int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} g(t_{2n})e^{-i[k(t_{2n})+\Delta t_{2n}]}, \tag{2.49}$$

et

$$R_{12}(T)=-R_{21}^*(T)=i\frac{\Omega_0}{2}\int_0^T dt_1 g(t_1)e^{+i[k(t_1)+\Delta t_1]}R_{11}^*(t_1). \tag{2.50}$$

Via la manière, qui a présentée dans le cas précédent, nous allons déterminer les séries de perturbation. Ainsi, on met:

$$G_{11}(T)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\Omega_0^2}{4})^n F_n(t), \tag{2.51}$$

avec

$$F_n(t)=\int_0^T dt_1 g(t_1)e^{+i[k(t_1)+\Delta t_1]}\int_0^{t_1} dt_2 g(t_2)e^{-i[k(t_2)+\Delta t_2]}...\int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} g(t_{2n})e^{-i[k(t_{2n})+\Delta t_{2n}]}, \tag{2.52}$$

qui l'on peut l'écrire sous la forme:

$$F_n(t)=\int_0^T dt_1 g(t_1)e^{+i[k(t_1)+\Delta t_1]}\int_0^{t_1} dt_2 g(t_2)e^{-i[k(t_2)+\Delta t_2]}F_{n-1}(t_2), \tag{2.53}$$

et qui satisfait l'équation différentielle non homogène suivante:

$$\frac{d^2}{dt^2}F_n(t)+[-i(\Delta+\dot{k})-\frac{\dot{g}}{g}]\frac{d}{dt}F_n(t)=g^2F_{n-1}(t), \tag{2.54}$$

et pour $G_{11}(t)$, on peut constatons qui doit satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2}{dt^2}G_{11}+[-i(\Delta+\dot{k})-\frac{\dot{g}}{g}]\frac{d}{dt}G_{11}+\frac{\Omega_0^2}{4}g^2G_{11}=-\frac{\Omega_0^2}{4}g^2. \tag{2.55}$$

Dans ce qui suit, nous intéressons au modèle Secant-hyperbolic, dans lequel $g(t)=sech(t/\tau)$, où τ est l'échelle de temps caractéristique.

Pour simplifier le problème on introduit la transformation temporelle $t=\tau/2\ ln(z/1-z)$, on fait aussi $g(t)=2\sqrt{z(1-z)}$. L'équation (2.55) sa tourne à:

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}G_{11}+[\frac{1-i\Delta\tau}{2}-z-ik'z(1-z)]\frac{d}{dz}G_{11}+\frac{\Omega_0^2}{4}\tau^2G_{11}=-\frac{\Omega_0^2}{4}\tau^2. \tag{2.56}$$

Cette équation peut être comparée à l'équation différentielle Hypergeometrique [33]:

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}G_{11}+[c-(a+b+1)z]\frac{d}{dz}G_{11}-abG_{11}=0. \tag{2.57}$$

Cela nécessite que k' soit de la forme $k'=\gamma\frac{\tau(z-1/2)}{z(1-z)}$. En termes de variable de temps $\dot{k}=\gamma\ tanh(\frac{t}{\tau})$, où γ est l'amplitude du modulation dans les unités de fréquence, et sa solution sous les conditions initiale $G_{11}[z(0)=1/2]=0$ et $G_{11}^{/}[z(0)=1/2]=0$ est donnée par:

$$G_{11}(T)=F(a,b,c;z)-1, \tag{2.58}$$

où $F(x)$ est la fonction Hypergeomitrique de Gauss, et les paramètres a,b,c données par:

$$a=\frac{\tau}{2}(i\gamma+\sqrt{\Omega_0^2-\gamma^2}),b=\frac{\tau}{2}(i\gamma-\sqrt{\Omega_0^2-\gamma^2}),c=\frac{1}{2}+i\frac{\tau}{2}(\gamma-\Delta). \tag{2.59}$$

Cela nous amène au résultat final de $R_{11}(T)$:

$$R_{11}(T)=F(a,b,c;z), \tag{2.60}$$

et pour $R_{12}(T)$, on obtient:

$$R_{12}(T)=\frac{(-ab)^{1/2}}{|1-c|}z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;z). \tag{2.61}$$

La probabilité de transition down-up à $t=\infty$ (i.e à $z=1$) est donnée par:

$$\begin{aligned}P_{\downarrow\uparrow}&=|R_{12}(z=1)|^2\\&=\left|\frac{(-ab)^{1/2}}{|1-c|}z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;z)\right|^2.\end{aligned} \tag{2.62}$$

En utilisant les propriétés [33]:

$$F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad \text{et} \qquad \Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\ sin(\pi z)}, \tag{2.63}$$

ceci conduit aux résultats obtenus par Hioe [32]:

$$P_{\downarrow\uparrow} = sech(\frac{\pi\tau}{2}\Delta)sech[\frac{\pi\tau}{2}\Delta(1+\gamma)]$$
$$\times\{sinh^2(\frac{\pi\tau\gamma}{2}\Delta)+sin^2(\frac{\pi\tau}{2}\sqrt{\Omega_0^2-\gamma^2})\}, \tag{2.64}$$

si $\gamma = 0$ (le cas non modulé) on obtient le résultat de Rosen-Zener [26]

$$P_{\downarrow\uparrow} = sech^2(\frac{\pi\tau}{2}\Delta)sin^2(\frac{\pi\tau}{2}\Omega_0). \tag{2.65}$$

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité des systèmes quantiques à deux niveaux dépendants du temps par le formalisme intégrale de chemin. En premier lieu, nous avons présenté le propagateur relatif du système dans la base des états cohérent fermioniques comme une série de perturbation, les calculs ont été faits pour deux diffirentes classes du champ en termes des fonctions spéciales. La formule de la probabilité de transition a été déduite pour chaque cas.

Chapitre 3: L'action d'un champ magnétique extèrne dépendant du temps sur une particule à deux niveaux

3.1. Introduction

Les interactions rayonnement-matière décrivent, dans le cadre de la mécanique quantique, les effets d'un rayonnement sur un atome. Dans ce sens, l'étude des effets quantiques dans un système comprenant une particule à deux niveaux interagissant avec un champ magnétique extèrne a reçu beaucoup d'attention expérimentale ainsi que théorique.

En raison de l'importance de ce sujet, nous nous consacrons à ce modèle d'interaction. On va examiner dans ce chapitre, la solution du problème d'une particule à deux niveaux soumise à l'action d'un champ magnétique extèrne dépendant du temps utilisant l'approche intégrale de Feynman. En premier, nous formulons le propagateur du système dans la base des états cohérents fermioniques pour décrivons la dynamique de spin. On considère alors des exemples pour une particule à deux niveaux dans un champ magnétique pour illustrer la méthode. Pour arriver, à la fin, à déduire les probabilités de transition.

3.2. Formalisme intégrale de chemin du système

Pour formuler le propagateur relatif au problème qui nous intéresse, considérons une particule à deux niveaux placée dans un champ magnétique arbitraire dépendant du temps décrit par l'Hamiltonien:

$$H(t) = -\frac{g}{2}\sigma B(t), \tag{3.1}$$

où g est le rapport gyromagnétique.

On utilise toujours le modèle fermionique de spin pour construire l'intégrale du chemin correspondante à ce système, ce qui permet d'écrire l'Hamiltonien par la forme suivante:

$$H(t) = -\frac{g}{2}B_x(u^\dagger d + d^\dagger u) - \frac{g}{2}B_y(-iu^\dagger d + id^\dagger u) - \frac{g}{2}B_z(u^\dagger u - d^\dagger d). \tag{3.2}$$

Par conséquence, le propagateur dans la base des états cohérents prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n - \bar{\beta}_n\beta_n} \\ \times exp\sum_{n=1}^{N+1}\Big[\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \bar{\beta}_n\beta_{n-1} + i\varepsilon\frac{g}{2}B_x(\bar{\alpha}_n\beta_{n-1} + \bar{\beta}_n\alpha_{n-1}) \\ + i\varepsilon\frac{g}{2}B_z(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\beta}_n\beta_{n-1}) + i\varepsilon\frac{g}{2}B_y(-i\bar{\alpha}_n\beta_{n-1} + i\bar{\beta}_n\alpha_{n-1})\Big]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce propagateur constitue notre résultat principal. Dans ce qui suit, on va appliquer les calculs sur différents types d'interaction, en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressent.

3.3. Applications

Dans cette section, nous considérerons des cas particuliers du champ magnétique. Le résultat explicite du propagateur est directement calculé et la probabilité de transition est ensuite déduite.

3.3.1. Cas 1: Intéraction stationnaire

Nous considérons un atome à deux niveaux intéragit avec un champ magnétique à composante constante dans une seule direction définie par:

$$B(t) = B\begin{pmatrix} f(t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad avec: \quad f(t) = -\frac{at}{\sqrt{1-a^2t^2}}, \tag{3.4}$$

où a est une constante arbitraire et $0 < t < a^{-1}$.

Dans ce cas, le propagateur prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n} exp\sum_{n=1}^{N+1}[\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1}+\bar{\beta}_n\beta_{n-1} \\ -i\varepsilon\frac{\omega}{2}\frac{at_n}{\sqrt{1-a^2t_n^2}}(\bar{\alpha}_n\beta_{n-1}+\bar{\beta}_n\alpha_{n-1})+i\varepsilon\frac{\omega}{2}(-i\bar{\alpha}_n\beta_{n-1}+i\bar{\beta}_n\alpha_{n-1})], \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $B = \omega / g$.

En premier lieu, il est préférable d'exprimer le propagateur comme suit:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n} \\ \times\prod_{n=1}^{N+1} exp(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n)R(t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$R(t_n) = 1 + i\varepsilon\frac{\omega}{2}\frac{at}{\sqrt{1-a^2t_n^2}}(\sqrt{1-a^2t_n^2}\sigma_y - at_n\sigma_x). \tag{3.7}$$

En utilisant la transformation suivante:

$$\tau = \frac{a}{\sqrt{1-a^2t^2}}\varepsilon, \qquad \tau = s_n - s_{n-1}, \qquad s_n = sin^{-1}at_n. \tag{3.8}$$

Le propagateur devient:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n} \\ \times\prod_{n=1}^{N+1} exp(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n)R(t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où

$$R(t_n)=1+i\tau\frac{\omega}{2a}(\sigma_y cos\ s_n-\sigma_x sin\ s_n). \tag{3.10}$$

A ce stade, notons que l'intégration sur les variables de Grassmann (α_n,β_n) peut être faite par deux méthodes.

a. Première méthode:

Dans cette première méthode, nous voudrions appliquer la méthode dans la quelle nous allons introduire des transformations afin de simplifier la forme de la matrice $R(t_n)$. Pour cela, nous introduisons de nouvelles variables de Grassmann (η_n,ξ_n) via une transformation unitaire dans l'espace des états cohérent de spin qui transforme la matrice $R(t_n)$ en s-indépendante $R^{/}(t_n)$,

$$(\alpha_n,\beta_n)\rightarrow(\eta_n,\xi_n)$$
$$(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n)=(\bar{\eta}_n,\bar{\xi}_n)e^{i\frac{s_n}{2}\sigma_z}\quad et\quad\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=e^{-i\frac{s_n}{2}\sigma_z}\begin{pmatrix}\eta_n\\ \xi_n\end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

En effet la mesure et l'action infinitésimale deviennent respectivement:

$$\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n}=\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\eta}_n d\eta_n d\bar{\xi}_n d\xi_n e^{-\bar{\eta}_n\eta_n-\bar{\xi}_n\xi_n}, \tag{3.12}$$

et

$$(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n)R(t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{n-1}\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=(\bar{\eta}_n,\bar{\xi}_n)R^{/}(t_n)\begin{pmatrix}\eta_{n-1}\\ \xi_{n-1}\end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

où

$$R^{/}(t_n)=1+\frac{i}{2}\tau(\sigma_z+\frac{\omega}{a}\sigma_y), \tag{3.14}$$

qui permet d'écrire le propagateur en fonction de nouvelles variables (η_n,ξ_n) sous la forme:

$$K(f,i;T)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\eta}_n d\eta_n d\bar{\xi}_n d\xi_n e^{-\bar{\eta}_n\eta_n-\bar{\xi}_n\xi_n}$$
$$\times\prod_{n=1}^{N+1}exp(\bar{\eta}_n,\bar{\xi}_n)R^{/}(t_n)\begin{pmatrix}\eta_{n-1}\\ \xi_{n-1}\end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Pour suivre les calculs, est plus commode de reformulant la matrice $R^{/}(t_n)$ comme suit:

$$R^{/}(t_n)=1+i\tau\frac{\sqrt{\omega^2+a^2}}{2a}(\sigma_z cos\ \gamma+\sigma_y sin\ \gamma), \tag{3.16}$$

avec

$$cos\ \gamma=\frac{a}{\sqrt{\omega^2+a^2}},\qquad sin\ \gamma=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+a^2}}. \tag{3.17}$$

Alors, nous présentons des nouvelles variables de Grassmann $(\varsigma_n, \upsilon_n)$ par l'intermédiaire d'une transformation unitaire définie par:

$$(\eta_n, \xi_n) \rightarrow (\varsigma_n, \upsilon_n)$$
$$(\bar{\eta}_n, \bar{\xi}_n) = (\bar{\varsigma}_n, \bar{\upsilon}_n) e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \quad et \quad \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix} = e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} \begin{pmatrix} \varsigma_n \\ \upsilon_n \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Le rôle de cette transformation unitaire est double. Premièrement, elle élimine l'angle γ présent dans l'expression de l'action, et deuxièmement, elle diagonalise la matrice $R^{/}(t_n)$. Le propagateur finalement prend la forme diagonale suivante:

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int d\bar{\varsigma}_n d\varsigma_n d\bar{\upsilon}_n d\upsilon_n e^{-\bar{\varsigma}_n\varsigma_n - \bar{\upsilon}_n\upsilon_n}$$
$$\times \prod_{n=1}^{N+1} exp(\bar{\varsigma}_n, \bar{\upsilon}_n) R^{//}(t_n) \begin{pmatrix} \varsigma_{n-1} \\ \upsilon_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

où

$$R^{//}(t_n) = 1 + i\tau \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a} \sigma_z. \tag{3.20}$$

Après avoir terminé la diagonalisation, on intègre sur tous les variables de Grassmann $(\varsigma_n, \upsilon_n)$. Le propagateur se réduit à la forme suivante:

$$K(f,i;T) = exp(\bar{\varsigma}_f, \bar{\upsilon}_f) R^{//}(T) \begin{pmatrix} \varsigma_i \\ \upsilon_i \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

où

$$R^{//}(T) = e^{iS\frac{\sqrt{\omega^2+a^2}}{2a}\sigma_z}, \tag{3.22}$$

et

$$S = sin^{-1}(aT). \tag{3.23}$$

Maintenant nous revenons aux anciennes variables de Grassmann (α, β). Ainsi, l'expression exacte du propagateur concernant notre problème est la suivante:

$$K(f,i;T) = exp(\bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f) R(T) \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

où $R(T)$ est une matrice définie par:

$$R(T) = e^{-i\frac{S}{2}\sigma_z} e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_x} e^{iS\frac{\sqrt{\omega^2+a^2}}{2a}\sigma_z} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_x}, \tag{3.25}$$

qui peut être réarrangés sous la forme de quatre termes comme suit:

$$R_{11}(T) = \left[cos(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a} S) + i\, cos(\gamma) sin(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a} S) \right] e^{-i\frac{S}{2}}, \tag{3.26}$$

$$R_{12}(T) = -sin(\gamma)sin(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a}S)e^{-i\frac{S}{2}}, \tag{3.27}$$

$$R_{21}(T) = sin(\gamma)sin(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a}S)e^{+i\frac{S}{2}}, \tag{3.28}$$

$$R_{22}(T) = \left[cos(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a}S) - i\, cos(\gamma)sin(\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a}S) \right] e^{+i\frac{S}{2}}. \tag{3.29}$$

b. Deuxième méthode:

Nous allons effectuer dans cette méthode l'intégration sur les variables de Grassmann comme série de perturbation. Tout d'abord, nous exprimons $R(t_n)$ dans (3.10) comme suit:

$$R(t_n) = 1 + i\tau Q(s_n), \tag{3.30}$$

où la matrice anti-diagonale est donnée par:

$$Q(s_n) = \begin{pmatrix} 0 & u(s_n) \\ u^*(s_n) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

avec

$$u(s_n) = -i\frac{\omega}{2a}e^{-is_n}. \tag{3.32}$$

Maintenat, passons à l'intégration sur toute les variables de Grassmann (α_n, β_n), ainsi le propagateur prend la forme suivante:

$$K(f,i;T) = exp(\bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f)R(T)\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

avec

$$R(T) = \lim_{N\to\infty} (-1)^N \prod_{\substack{n=1 \\ \leftarrow}}^{N+1} R(t_n). \tag{3.34}$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrices suivantes:

$$\begin{aligned} R(T) = 1 + i\int_0^S ds_1 Q(s_1) + (i)^2 \int_0^S ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 Q(s_1)Q(s_2) \\ + \ldots + (i)^N \int_0^S ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \ldots \int_0^{s_{N-1}} ds_N \\ Q(s_1)Q(s_2)Q(s_3)\ldots Q(s_{N-1})Q(s_N) + \ldots \end{aligned} \tag{3.35}$$

Les éléments de la matrice $R(T)$ sont:

$$R_{11}(T) = R_{22}^*(T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\omega^2}{4a^2})^n \int_0^S ds_1 e^{-is_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{+is_2} \ldots \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{+is_{2n}} \right] e^{-i\frac{S}{2}}, \tag{3.36}$$

et

$$R_{12}(T) = -R_{21}^{*}(T) = -\frac{\omega}{2a}\int_0^S ds_1 e^{-is_1} R_{11}^{*}(s_1). \tag{3.37}$$

L'expression de premier élément $R_{11}(T)$ peut être écrite sous la forme la plus commode. En effet, nous mettons en premier:

$$F_n(0,S) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\omega^2}{4a^2}\right)^n \int_0^S ds_1 e^{-is_1}\int_0^{s_1} ds_2 e^{+is_2}\ldots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} e^{+is_{2n}}. \tag{3.38}$$

Evaluons $F_n(0,S)$ en utilisant; en premier, la transformation de Laplace par rapport à S, puis le théorème de convolution:

$$\tilde{F}(0,q) = \int_0^{+\infty} e^{-qS} F(0,S)dS = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\omega^2/(4a^2)}{q(q-i)}\right]^n. \tag{3.39}$$

Le résultat est encore une série:

$$\tilde{F}(q) = \frac{q-i}{q(q-i)+\frac{\omega^2}{4a^2}} - \frac{1}{q}. \tag{3.40}$$

Ce résultat est valable pour:

$$\left|-\frac{\omega^2/(4a^2)}{q(q-i)}\right| < 1. \tag{3.41}$$

En prenant la transformation de Laplace inverse on obtient pour l'élément $R_{11}(T)$ l'expression:

$$R_{11}(T) = [cos(\frac{\Omega}{2}S) + \frac{i}{\Omega}sin(\frac{\Omega}{2}S)]e^{-i\frac{S}{2}}, \tag{3.42}$$

avec

$$\Omega = \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{a}. \tag{3.43}$$

Par un calcul identique, on trouve les autres éléments:

$$R_{12}(T) = -\frac{\omega}{a\Omega}sin(\frac{\Omega}{2}S)e^{-i\frac{S}{2}}, \tag{3.44}$$

$$R_{21}(T) = \frac{\omega}{a\Omega}sin(\frac{\Omega}{2}S)e^{+i\frac{S}{2}}, \tag{3.45}$$

$$R_{22}(T) = [cos(\frac{\Omega}{2}S) - \frac{i}{\Omega}sin(\frac{\Omega}{2}S)]e^{+i\frac{S}{2}}. \tag{3.46}$$

La probabilité de transition dans ce cas est à la forme:

$$P_{\downarrow\uparrow} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + a^2} sin^2\left[\frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{2a} sin^{-1}(aT)\right]. \tag{3.47}$$

Ce résultat coïncide avec celui de référence [34].

3.3.2. Cas 2: Intéraction dépendante du temps

Nous considérons maintenant l'intéraction entre un atome à deux niveaux et un champ magnétique. Ce dernier est définie par:

$$B(t)=\begin{pmatrix} \frac{B}{2}sin\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2} \\ -\frac{B}{cosh(\omega_0 t/2)}-B_0\frac{1-\omega^2t^2}{(1+\omega^2t^2)^2} \\ \frac{B}{2}cos\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Dans ce cas, la forme discrète de l'intégrale de chemin du propagateur est:

$$\begin{aligned} K(f,i;T)=&\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n} \\ &\times\prod_{n=1}^{N+1}exp\Bigg[\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1}+\bar{\beta}_n\beta_{n-1}+i\varepsilon\frac{\omega_0}{4}sin\frac{\omega t_n}{1+\omega^2t_n^2}(\bar{\alpha}_n\beta_{n-1}+\bar{\beta}_n\alpha_{n-1}) \\ &+i\varepsilon\frac{\omega_0}{4}cos\frac{\omega t_n}{1+\omega^2t_n^2}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1}-\bar{\beta}_n\beta_{n-1}) \\ &-i\varepsilon(\frac{\omega_0}{2cosh(\omega_0 t_n/2)}+\frac{\omega}{2}\frac{1-\omega^2t_n^2}{(1+\omega^2t_n^2)^2})(-i\bar{\alpha}_n\beta_{n-1}+i\bar{\beta}_n\alpha_{n-1})\Bigg], \end{aligned} \tag{3.49}$$

où $B=\omega_0/g$ et $B_0=\omega/g$.

Au debut, nous éliminons l'angle $\omega t/(1+\omega^2t^2)$ par la transformation suivante:

$$(\alpha_n,\beta_n)\to(\eta_n,\xi_n)$$

$$(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n)=(\bar{\eta}_n,\bar{\xi}_n)e^{+\frac{i}{2}\frac{\omega t_n}{1+\omega^2t_n^2}\sigma_y} \quad et \quad \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=e^{-\frac{i}{2}\frac{\omega t_n}{1+\omega^2t_n^2}\sigma_y}\begin{pmatrix}\eta_n\\ \xi_n\end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

Il est facile de montrer que la mesure et l'action infinitésimale deviennent respectivement:

$$\prod_{n=1}^{N}(d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n})=\prod_{n=1}^{N}(d\bar{\eta}_n d\eta_n d\bar{\xi}_n d\xi_n e^{-\bar{\eta}_n\eta_n-\bar{\xi}_n\xi_n}), \tag{3.51}$$

$$\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1}+\bar{\beta}_n\beta_{n-1}=\bar{\eta}_n\eta_{n-1}+\bar{\xi}_n\xi_{n-1}+i\frac{\omega}{2}\varepsilon\frac{1-\omega^2t_n^2}{(1+\omega^2t_n^2)^2}(-\bar{\eta}_n\xi_{n-1}+\bar{\xi}_n\eta_{n-1})+O(\varepsilon^2), \tag{3.52}$$

et

$$i\varepsilon\left[sin\frac{\omega t_n}{1+\omega^2t_n^2}(\bar{\alpha}_n\beta_{n-1}+\bar{\beta}_n\alpha_{n-1})+cos\frac{\omega t_n}{1+\omega^2t_n^2}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1}-\bar{\beta}_n\beta_{n-1})\right]=i\varepsilon(\bar{\eta}_n\eta_{n-1}-\bar{\xi}_n\xi_{n-1}). \tag{3.53}$$

Le propagateur en fonction des nouvelles variables de Grassmann (η_n, ξ_n) devient:

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} d\bar{\eta}_n d\eta_n d\bar{\xi}_n d\xi_n e^{-\bar{\eta}_n\eta_n - \bar{\xi}_n\xi_n}$$
$$\times \prod_{n=1}^{N+1} exp\Big[\bar{\eta}_n\eta_{n-1} + \bar{\xi}_n\xi_{n-1} + i\varepsilon\frac{\omega_0}{2}(\bar{\eta}_n\eta_{n-1} - \bar{\xi}_n\xi_{n-1})$$
$$-i\varepsilon\frac{\omega_0}{cosh(\omega_0 t_n/2)}(-i\bar{\eta}_n\xi_{n-1} + i\bar{\xi}_n\eta_{n-1})\Big]. \tag{3.54}$$

Maintenant, nous utilisons les transformations suivantes:

$$\tau = -\frac{\omega_0}{cosh(\omega_0 t_n/2)}\varepsilon, \qquad \tau = s_n - s_{n-1}, \qquad s_n = 2sin^{-1}\Big(\frac{1}{cosh(\omega_0 t_n/2)}\Big), \tag{3.55}$$

et

$$Z_n = \begin{pmatrix}\eta_n \\ \xi_n\end{pmatrix} \qquad , \qquad \bar{Z}_n = \left(\bar{\eta}_n, \bar{\xi}_n\right). \tag{3.56}$$

Suite à ces transformations, le propagateur devient:

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} d\bar{Z}_n dZ_n e^{-\bar{Z}_n Z_n}$$
$$\times \prod_{n=1}^{N+1} exp\Big[\bar{Z}_n Z_{n-1} + i\tau\bar{Z}_n Q(t_n) Z_{n-1}\Big], \tag{3.57}$$

où

$$Q(t_n) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4sin(s_n/2)} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{4sin(s_n/2)} \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Le reste des calculs peut être effectués par deux manières:

a. Première méthode:

Dans cette méthode, nous introduisons de nouvelles variables de Grassmann (φ_n) via une transformation unitaire dans l'espace des états cohérents de spin défini par:

$$Z_n = U(t_n)\varphi_n \qquad , \qquad \bar{Z}_n = \bar{\varphi}_n U^{\dagger}(t_n) \tag{3.59}$$

avec

$$U(t_n) = exp\left(-\frac{i}{2} ln\, tan\frac{s_n}{4}\sigma_z\right), \tag{3.60}$$

ce qui modifient l'expression (3.57) sous la forme suivante:

$$K(f,i;T) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} d\bar{\varphi}_n d\varphi_n e^{-\bar{\varphi}_n\varphi_n} \prod_{n=1}^{N+1} exp\Big[\bar{\varphi}_n\varphi_{n-1} + i\tau\bar{\varphi}_n Q_1(t_n)\varphi_{n-1}\Big], \tag{3.61}$$

où

$$Q_1(t_n)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}e^{+\frac{i}{2}ln\ tan\frac{s_n}{4}} \\ \frac{i}{2}e^{-\frac{i}{2}ln\ tan\frac{s_n}{4}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

L'étape suivante consiste à prendre la forme diagonale de l'action afin de pouvoir effectuer l'intégration.

Ainsi, nous définissons une transformation unitaire sur les variables de Grassmann:

$$\begin{cases} \varphi \to \phi, \\ \varphi = U_1(t_n)\phi = \begin{pmatrix} A(s) & B(s) \\ -B^*(s) & A^*(s) \end{pmatrix}\phi, \end{cases} \tag{3.63}$$

et

$$\begin{cases} U_1(t)U_1^\dagger(t) = U_1^\dagger(t)U_1(t) = 1, \\ \det U_1(t) = 1, \end{cases} \tag{3.64}$$

avec les conditions initiales $A(t=0)=1$ et $B(t=0)=0$.

Au moyen d'un calcul simple comprenant le développement suivant:

$$\begin{cases} U_1(s_{n-1}) = U_1(s_n) - \tau\dfrac{dU_1(s_n)}{ds_n} + O(\tau^2), \\ U_1^\dagger(s_n)U_1(s_{n-1}) = \mathrm{I} - \tau U_1^\dagger(s_n)\dfrac{dU_1(s_n)}{ds_n}, \end{cases} \tag{3.65}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} d\bar{\phi}_n d\phi_n e^{-\bar{\phi}_n\phi_n} \\ &\times\prod_{n=1}^{N+1} exp\left[\bar{\phi}_n\phi_{n-1} + i\tau\bar{\phi}_n Q_2(t_n)\phi_{n-1}\right], \end{aligned} \tag{3.66}$$

où

$$Q_2(t_n) = iU_1^\dagger(s)\frac{dU_1(s_n)}{ds} + U_1^\dagger(s_n)Q_1(s_n)U_1(s_n). \tag{3.67}$$

Nous déterminons maintenant la transformation unitaire en fixant la forme diagonale de l'action, ce qui nous amène à la condition suivante:

$$Q_2(t_n) = 0. \tag{3.68}$$

On intègre sur tout les variables de Grassmann (ϕ_n), le propagateur finalement prend la forme suivante:

$$K(f,i;T) = exp\left(\bar{\phi}_f\phi_i\right). \tag{3.69}$$

En termes des anciens variables (α,β), cela s'écrit:

$$K(f,i;T)=exp\left(\overline{\alpha}_f\,\overline{\beta}_f\right)M(T)\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}, \tag{3.70}$$

où

$$M(T)=e^{-\frac{i}{2}\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2}\sigma_y}e^{-\frac{i}{2}ln\,tan\frac{s}{4}\sigma_z}\begin{pmatrix}A(s) & B(s)\\ -B^*(s) & A^*(s)\end{pmatrix}. \tag{3.71}$$

Aussi, les éléments $A(s)$ et $B(s)$ de la matrice $U_1(s)$ étant déterminés par la condition (3.68), elle doit donc satisfaire l'équation suivante:

$$i\frac{dU_1(s)}{ds}+Q_1(s)U_1(s)=0, \tag{3.72}$$

i.e, un système de deux équations couplées:

$$\begin{cases}\dfrac{dA}{ds}=-\dfrac{1}{2}B^*exp(i\,ln\,tan\dfrac{s}{4})\\ \dfrac{dB^*}{ds}=\dfrac{1}{2}Aexp(-i\,ln\,tan\dfrac{s}{4})\end{cases}\quad avec\quad\begin{cases}A(\pi)=1\\ B(\pi)=0\end{cases} \tag{3.73}$$

On découple ce système, il se réduit à une équation différentielle:

$$\frac{d^2B^*}{ds^2}+\frac{i}{2sin(s/2)}\frac{dB^*}{ds}+\frac{1}{4}B^*=0, \tag{3.74}$$

dont la solution est comme suit:

$$B^*(s)=\frac{i}{2}(i+\cos\frac{s}{2})h(s), \tag{3.75}$$

ensuite:

$$A(s)=2e^{iln\,tan(\frac{s}{4})}\left[-\frac{i}{4}h(s)sin\frac{s}{2}+\frac{i}{2}(i+cos\frac{s}{2})\frac{dh(s)}{ds}\right], \tag{3.76}$$

où

$$h(s)=\int_{\pi}^{s}\frac{e^{-iln\,tan(\tau/4)}}{(i+cos(\tau/2))^2}d\tau. \tag{3.77}$$

Cette partie a fait l'objet d'une publication intitulée "Spinning particle in interaction with a time dependent magnetic field: a path integral approach" [35].

b. Deuxième méthode:

Dans cette méthode, nous allons effectuer les calculs par l'approche de la série de perturbation, où le propagateur en (3.57) est donné par la forme perturbative suivante:

$$K(f,i;T)=\exp\left\{\left(\overline{\eta}_f\,\overline{\xi}_f\right)\begin{pmatrix}R_{11}(T) & R_{12}(T)\\ R_{21}(T) & R_{22}(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_i\\ \xi_i\end{pmatrix}\right\}, \tag{3.78}$$

où les éléments matriciels définis comme suit:

$$R_{11}(T)=R_{22}^{*}(T)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{4})^{n}\int_{0}^{S}ds_{1}e^{-i\,ln\,tan(\frac{s_1}{4})}\int_{0}^{s_1}ds_{2}e^{+i\,ln\,tan(\frac{s_2}{4})}\right.$$
$$\left.\times\ldots\times\int_{0}^{t_{2n-2}}ds_{2n-1}e^{-i\,ln\,tan(\frac{s_{2n-1}}{4})}\int_{0}^{t_{2n-1}}ds_{2n}e^{+i\,ln\,tan(\frac{s_{2n}}{4})}\right]e^{-\frac{i}{2}ln\,tan(\frac{S}{4})}, \tag{3.79}$$

et

$$R_{12}(T)=-R_{21}^{*}(T)=\frac{1}{2}\int_{0}^{S}ds_{1}e^{-i\,ln\,tan(\frac{s_1}{4})}R_{11}^{*}(s_1). \tag{3.80}$$

La série de perturbations dans l'élément $R_{11}(T)$ sera résumée en suivant les mêmes étapes précédentes. On met:

$$G_{11}(T)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{4})^{n}F_{n}(T), \tag{3.81}$$

avec

$$F_{n}(T)=\int_{0}^{S}ds_{1}e^{-i\,ln\,tan(\frac{s_1}{4})}\int_{0}^{s_1}ds_{2}e^{+i\,ln\,tan(\frac{s_2}{4})}$$
$$\times\ldots\times\int_{0}^{t_{2n-2}}ds_{2n-1}e^{-i\,ln\,tan(\frac{s_{2n-1}}{4})}\int_{0}^{t_{2n-1}}ds_{2n}e^{+i\,ln\,tan(\frac{s_{2n}}{4})}. \tag{3.82}$$

On trouve que $G_{11}(T)$ satisfaire à l'équation suivante:

$$\frac{d^2}{ds^2}G_{11}(t)-\frac{i}{2sin(s/2)}\frac{d}{ds}G_{11}(t)+\frac{1}{4}G_{11}=-\frac{1}{4}. \tag{3.83}$$

Ses solutions sous les conditions initiale $G_{11}(t=0)=0$, $G_{11}^{/}(t=0)=0$ est donnée par:

$$G_{11}(T)=2e^{iln\,tan(\frac{s}{4})}\left[-\frac{i}{4}h(s)sin\frac{s}{2}+\frac{i}{2}(i+cos\frac{s}{2})\frac{dh(s)}{ds}\right]-1. \tag{3.84}$$

Cela nous amène au résultat final de $R_{11}(T)$:

$$R_{11}(T)=2\left[-\frac{i}{4}h(s)sin\frac{s}{2}+\frac{i}{2}(i+cos\frac{s}{2})\frac{dh(s)}{ds}\right]e^{\frac{i}{2}ln\,tan(\frac{s}{4})}, \tag{3.85}$$

et de la même manière on calcule les autres éléments. On trouve:

$$R_{12}(T)=\frac{i}{2}(-i+cos\frac{s}{2})h^{*}(s)e^{-\frac{i}{2}ln\,tan(\frac{s}{4})}, \tag{3.86}$$

$$R_{21}(T)=\frac{i}{2}(i+cos\frac{s}{2})h(s)e^{+\frac{i}{2}ln\,tan(\frac{s}{4})}, \tag{3.87}$$

$$R_{22}(T)=2\left[\frac{i}{4}h^{*}(s)sin\frac{s}{2}+\frac{i}{2}(i-cos\frac{s}{2})\frac{dh^{*}(s)}{ds}\right]e^{-\frac{i}{2}ln\,tan(\frac{s}{4})}. \tag{3.88}$$

En termes des variables (α,β), cela s'écrit:

$$K(f,i;T)=exp\left\{\left(\bar{\alpha}_f\,\bar{\beta}_f\right)M(T)\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}, \tag{3.89}$$

où

$$M(T)=e^{-\frac{i}{2}\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2}\sigma_y}\begin{pmatrix}R_{11}(T) & R_{12}(T)\\ R_{21}(T) & R_{22}(T)\end{pmatrix}. \tag{3.90}$$

L'expression de la probabilité de transition dans ce cas est donnée par la forme suivante:

$$P_{\downarrow\uparrow}=\left\|\left[R_{11}(T)sin\frac{1}{2}(\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2})+R_{21}(T)cos\frac{1}{2}(\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2})\right]\right\|^2. \tag{3.91}$$

Un calcul simple conduit à la formule de transition de probabilité:

$$P_{\downarrow\uparrow}=\frac{1+cos^2(s/2)}{4}\left|-h(s)cos\frac{1}{2}(\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2})\right.$$
$$\left.+2\left[\frac{dh(s)}{ds}-\frac{sin(s/2)}{(i+cos(s/2))}h(s)\right]sin\frac{1}{2}(\frac{\omega t}{1+\omega^2t^2})\right|^2. \tag{3.92}$$

Ce résultat est en parfait accord avec ceux obtenus dans les références [17] et [31].

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié par le formalisme intégrale de chemin le mouvement d'une particule à deux niveaux soumise à un champ magnétique dépendant du temps. En premier lieu, nous avons présenté le propagateur relatif du système dans la base des états cohérent fermioniques. Les calculs ont été faits pour différentes types d'intéraction. Où nous avons pu intégrer sur les variables de spin décrits par les oscillateurs fermioniques, et les résultats ont été exprimés en termes des fonctions élémentaires et des fonctions spéciales. Par conséquence, les probabilités de transitions correspondantes ont été trouvées exactement.

Chapitre 4: Le modèle de Jaynes-Cummings et les intéractions dépendantes du temps

4.1. Introduction

Parmi les systèmes les plus simples et les plus significatifs en optique quantique, le modèle de Jaynes-Cummings (J-C). Ce modèle décrivant l'interaction d'atomes à deux niveaux avec des champs éléctromagnétique quantifiés dans l'approximation dipolaire [36]. Au cours des dernières décennies, le modèle J-C a reçu beaucoup d'attention; un nombre important d'études théoriques et expérimentales sont menées dans ce cadre [37-39]. Le modèle J-C permet de déterminer presque toutes les propriétés de la mécanique quantique du système. D'où lintêret de son usage fréquent ou de ses quelques généralisations.

L'étude de modèle J-C par le formalisme l'intégrale de chemin en représentation des états cohérents a été faite par plusieurs auteurs. Nous citérons Zaheer et Zubairy [40] qui ont résolu le modèle J-C dans l'approxiamtion d'onde tournante (RWA). Par la même méthode Buzek [41], Boudjedaa et al [16] ont déterminé le propagateur associé à la généralisation multi-photon du modèle J-C, et en présence de l'effet de Kerr nonlinéaire le cas a été étudiée récemment [42,43]. Dans ces cas les séries de perturbation ont été sommée dans des cas particuliers stationnaires (interaction indépendant de temps).

Dans ce chapitre, on va étudiés par l'approche intégrale du chemin le modèle J-C dans les cas non stationnaires. Le premier cas, on se focalise à l'intéraction entre un champ éléctromagnétique dépendant du temps et atome à deux niveaux. Dans le deuxiéme cas, on aborde à l'étude d'intéraction entre un champ éléctromagnétique et atome à deux niveaux avec un paramètre de couplage dépendant du temps. Pour le troisième cas, on va étudier l'interaction entre un champ éléctromagnétique et atome à deux niveaux en présence d'un champ gravitationnel homogène classique. L'utilisation des états cohérents bosonique et fermionique sont faites pour représenter le propagateur dans chaque problème considéré. Puis, nous effectuons les calculs directs sur les variables de spin. Par conséquent, l'intégration sur les variables bosoniques est facile à réaliser et le résultat est donné sous la forme d'une série de perturbations, qui se résume exactement. Les fonctions d'onde finalement sont déduites.

4.2. Le modèle de Jaynes-Cummings dans sa version intégrale de chemin

Dans cette section, nous allons représenter par le formalisme intégrale du chemin le modèle J-C en utilisant les états cohérents fermioniques et bosoniques: l'une par rapport au spin et l'autre relative à l'operateur de création et d'annihilation associés au champ électromagnétique, puis les fonctions d'onde sont extraires utilisant la base de spin.

4.2.1. La représentation Path integral du modèle Jaynes-Cummings

Le modèle J-C le plus simple de systèmes dont la solution par l'intégrale de chemin est exacte est celle le modèle standard. Par conséquent, elles fournissent de bons exemples pour la compréhension appropriée de diverses étapes mathématiques impliquées dans le calcul explicite des intégrales de chemin.

Pour établir l'intégrale de chemin correspondant au modèle J-C standard, considérons l'Hamiltonien:

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + H_{int} \\ &= \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_a}{2}\sigma_z + \lambda(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où a et $a^\dagger$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création du champ, ω est la fréquence du champ, λ est la constante de couplage entre l'atome et le champ, ω_a est la fréquence de transition entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome, $\{\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-\}$ sont les matrices de Pauli décrivent le système à deux niveaux.

Dans ce qui suit, nous allons les représenter par le modèle fermioniques de Schwinger. Suivant cette procédure, les matrices de Pauli σ_i remplacées par une paire d'opérateurs fermioniques (u, d)

$$\begin{cases} \sigma_z = u^\dagger u - d^\dagger d, \\ \sigma_+ = u^\dagger d, \\ \sigma_- = d^\dagger u. \end{cases} \tag{4.2}$$

Les opérateurs fermioniques et bosoniques vérifient les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} u^\dagger |0\rangle = |\uparrow\rangle, d^\dagger |0\rangle = |\downarrow\rangle, \\ u|0\rangle = 0, d|0\rangle = 0, \\ a|0,0\rangle = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

L'Hamiltonien prendra alors la forme Fermion-Boson suivante:

$$H(t) = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_a}{2}(u^\dagger u - d^\dagger d) + \lambda(u^\dagger d a + d^\dagger u a^\dagger). \tag{4.4}$$

Pour pouvoir construire l'intégrale du chemin corrspondante à ce modèle, en considérant l'état quantique $|Z, \alpha, \beta\rangle$, où Z est un variable complexe cohérent dont les propriétés sont données par (1.2) et (α, β) sont les variables de Grassmann vérifiant (1.3). Le propagateur est définit par:

$$K(f, i; T) = \langle Z_f, \alpha_f, \beta_f | T_D \, exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H(t)\right) | Z_i, \alpha_i, \beta_i\rangle. \tag{4.5}$$

Par les mémes étapes précédentes, subdivisions l'intervalle de temps $[0, T]$ et utilisant la formule de Trotter, on aura:

$$K(f, i; T) = \lim_{N\to\infty} \langle Z_f, \alpha_f, \beta_f | \left(e^{-i\varepsilon H_0} e^{-i\varepsilon H_{int}}\right)^{N+1} | Z_i, \alpha_i, \beta_i\rangle. \tag{4.6}$$

En introduisons à chaque instant t_n la relation de fermeture relative à la base $\{|Z, \alpha, \beta\rangle\}$ nous écrivons alors le propagateur comme:

$$\begin{aligned} K(f, i; T) = &\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int \frac{d^2 Z_n}{2\pi i} e^{-\bar{Z}_n Z_n} \prod_{n=1}^{N+1} \langle Z_n | e^{-i\varepsilon H_0} | Z_{n-1}\rangle \\ &\times \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n \alpha_n - \bar{\beta}_n \beta_n} \prod_{n=1}^{N+1} \langle \alpha_n, \beta_n | e^{-i\varepsilon H_{int}} | \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}\rangle. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Les éléments de matrice se calculent aisément et les résultats sont:

- pour les bosons:

$$\left\langle Z_n \middle| e^{-i\varepsilon\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})} \middle| Z_{n-1} \right\rangle = exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\bar{Z}_n\left(Z_n - Z_{n-1}\right) - (\bar{Z}_n - \bar{Z}_{n-1})Z_{n-1}\right]\right\}$$
$$\times exp\left\{-i\varepsilon\omega\left(\bar{Z}_n Z_{n-1} + \frac{1}{2}\right)\right\} \tag{4.8}$$

- pour les fermions:

$$\left\langle \alpha_n, \beta_n \right| e^{-i\varepsilon H_{int}} \left| \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \right\rangle = exp\left[(1 - i\varepsilon\frac{\omega_a}{2})\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} + (1 + i\varepsilon\frac{\omega_a}{2})\bar{\beta}_n\beta_{n-1}\right.$$
$$\left. - i\varepsilon\lambda Z_n\bar{\alpha}_n\beta_{n-1} - i\varepsilon\lambda\bar{Z}_n\bar{\beta}_n\alpha_{n-1}\right]. \tag{4.9}$$

Ce qui laisse le propagateur à la limite continue $(N \to +\infty)$ s'écrire comme:

$$K(f,i;T) = \int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z} - Z\dot{\bar{Z}}) - i\omega(\bar{Z}Z + \frac{1}{2})\right]\right\}$$
$$\times \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n - \bar{\beta}_n\beta_n}$$
$$\times exp\left[(1 - i\varepsilon\frac{\omega_a}{2})\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} + (1 + i\varepsilon\frac{\omega_a}{2})\bar{\beta}_n\beta_{n-1} - i\varepsilon\lambda Z_n\bar{\alpha}_n\beta_{n-1} - i\varepsilon\lambda\bar{Z}_n\bar{\beta}_n\alpha_{n-1}\right], \tag{4.10}$$

avec

$$D\bar{Z}DZ = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{d\bar{Z}_n dZ_n}{2\pi i}e^{-\bar{Z}_n Z_n}, \tag{4.11}$$

dont les éléments matriciels définissent l'amplitude de transition entre les états propres du spin d'aprés (4.3). Ces éléments de transition peuvent être réarrangés sous la forme d'une somme de quatre termes:

$$K(f,i;T) = exp\left\{(\bar{\alpha}_f, \bar{\beta}_f)\begin{pmatrix} K_{11}(T) & K_{12}(T) \\ K_{21}(T) & K_{22}(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i \\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.12}$$

Ayant montré comment formuler le modèle J-C dans le cadre des intégrales de chemin, il nous reste à la généralisé avec les problèmes qui nous intéressent. Avant cela, nous allons extrayons l'expression générale des fonctions d'onde correspondantes.

4.2.2. Les fonctions d'ondes

Dans le but de déterminer les fonctions d'onde correspondantes, passons à la représentation habituelle pour le spin. Comme nous l'avons vu précédemment, le propagateur s'écrire dans la base de spin sous la forme matricielle suivante:

$$K(m_f, m_i; T) = \begin{pmatrix} K_{11}(T) & K_{12}(T) \\ K_{21}(T) & K_{22}(T)\end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

La relation entre $K(f,i;T)$ et l'opérateur d'évolution est donnée par:

$$\hat{U}(t)=\int\frac{d^2Z_f}{\pi}\int\frac{d^2Z_i}{\pi}\left|Z_f\right\rangle K(Z_f,Z_i;T)\left\langle Z_i\right|, \tag{4.14}$$

où

$$\hat{U}(t)=e^{-iHt}=\begin{pmatrix}\Lambda_{\uparrow\uparrow} & \Lambda_{\uparrow\downarrow}\\ \Lambda_{\downarrow\uparrow} & \Lambda_{\downarrow\downarrow}\end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Ce qui nous amène à:

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow}=\int\frac{d^2Z_f}{\pi}\int\frac{d^2Z_i}{\pi}\left|Z_f\right\rangle K_{11}(T)\left\langle Z_i\right|, \tag{4.16}$$

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow}=\int\frac{d^2Z_f}{\pi}\int\frac{d^2Z_i}{\pi}\left|Z_f\right\rangle K_{12}(T)\left\langle Z_i\right|, \tag{4.17}$$

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow}=\int\frac{d^2Z_f}{\pi}\int\frac{d^2Z_i}{\pi}\left|Z_f\right\rangle K_{21}(T)\left\langle Z_i\right|, \tag{4.18}$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow}=\int\frac{d^2Z_f}{\pi}\int\frac{d^2Z_i}{\pi}\left|Z_f\right\rangle K_{22}(T)\left\langle Z_i\right|. \tag{4.19}$$

Afin d'extraire les fonctions d'onde, il est plus approprié de passer à la base $\left|l\right\rangle$ où l est le nombre d'occupation. La relation avec $\left|Z\right\rangle$ est:

$$\left|Z\right\rangle=exp(-\frac{|Z|^2}{2})\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Z^l}{\sqrt{l!}}\left|l\right\rangle. \tag{4.20}$$

Pour le système atomique considéré, la fonction d'onde s'écrit sous la forme suivante:

$$\Psi(T)=\hat{U}(T)\Psi(0). \tag{4.21}$$

On considère que l'atome initialement à l'état excité; où le mode champ est pris initialement dans l'état cohérent:

$$\Psi(0)=\sum_{l=0}^{\infty}\omega_l\begin{pmatrix}\left|l\right\rangle\\ 0\end{pmatrix},\quad avec:\quad \omega_l=\frac{Z^l}{\sqrt{l!}}e^{-\frac{|Z|^2}{2}}. \tag{4.22}$$

Et de là on peut, facilement, déduire que:

$$\Psi(T)=\sum_{l=0}^{\infty}\omega_l\begin{pmatrix}\Lambda_{\uparrow\uparrow}\left|l\right\rangle\\ \Lambda_{\downarrow\uparrow}\left|l\right\rangle\end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Dans ce qui suit nous traitons explicitement des exemples pour illustrer la méthode.

4.3. Applications sur les intéractions dépendantes du temps

Dans cette section, nous appliquons les calculs sur le modèle J-C généralisée où l'intéraction est dépendante du temps.

4.3.1. Intéraction entre un champ éléctromagnétique dépendant du temps et atome à deux niveaux

Comme une première application des intéractions dépendantes du temps pour le modèle de J-C, considérons l'Hamiltonien de système d'écrit l'intéraction d'un champ éléctromagnétique dépendant du temps avec atome à deux niveaux qui est donné par l'expression suivante:

$$H(t) = H_0 + H_{int}, \tag{4.24}$$

avec

$$H_0 = \omega a^\dagger a + g(t) a^\dagger a, \tag{4.25}$$

et

$$H_{int} = \frac{\omega_a}{2}\sigma_z + \lambda(a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \tag{4.26}$$

où $g(t)$ est une fonction dépendante du temps.

Ici, notre objectif est de présenter le travail [44] qui s'interesse à étudier ce système par la technique de l'intégrale de Feynman. Il faut noter que ce dernier est aussi étudié récemment par résolution directe de l'équation de Schrödinger [45].

Passons maintenant à la description du système au moyen des intégrales de chemin. De ce qui précède, la forme du propagateur s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = \int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z} - Z\dot{\bar{Z}}) - i(\omega + g(t))\bar{Z}Z\right]\right\} \\ \times \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n - \bar{\beta}_n\beta_n} \\ \times\prod_{n=1}^{N+1} exp\left\{\left(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n\right) R(Z_n, t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}\right\}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

avec

$$R(Z_n, t_n) = e^{-i\varepsilon\frac{\omega_a}{2}\sigma_z} + i\varepsilon Q(Z_n, t_n), \tag{4.28}$$

où

$$Q(Z_n, t_n) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda Z_n \\ -\lambda Z_n^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Intégrons sur toutes les variables de Grassmann (α, β), on obtient:

$$K(f,i;T)=\int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i(\omega+g(t))\bar{Z}Z\right]\right\}$$
$$\times exp\left\{\left(\overline{\alpha}_f,\overline{\beta}_f\right)R(Z,T)\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.30}$$

avec

$$R(Z,T)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(-1)^n R(Z_n,t_n). \tag{4.31}$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrice suivant [16], la série devient (à la limite continu):

$$R(Z,T)=e^{-\frac{i}{2}\int_0^T dt\omega_a\sigma_z}+i\int_0^T dt_1 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a\sigma_z}Q(t_1)e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_1} dt\omega_a\sigma_z}$$
$$+(i)^2\int_0^T dt_1\int_0^{t_1}dt_2 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a\sigma_z}Q(t_1)e^{-\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1} dt\omega_a\sigma_z}Q(t_2)e^{-\frac{i}{2}\int_{t_3}^{t_2} dt\omega_a\sigma_z}$$
$$+\ldots+(i)^N\int_0^T dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int_0^{t_2}dt_3\ldots\int_0^{t_{N-1}}dt_N e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a\sigma_z}Q(t_1)e^{-\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1} dt\omega_a\sigma_z}$$
$$\times Q(t_2)e^{-\frac{i}{2}\int_{t_3}^{t_2} dt\omega_a\sigma_z}Q(t_3)\ldots Q(t_{N-1})e^{-\frac{i}{2}\int_{t_N}^{t_{N-1}} dt\omega_a\sigma_z}Q(t_N)e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_N} dt\omega_a\sigma_z}+\ldots \tag{4.32}$$

Ses éléments de matrice sont respectivement:

$$R_{11}(Z,T)=R_{22}^*(Z,T)=e^{-\frac{i}{2}\int_0^T dt\omega_a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-i\lambda\right)^{2n}\int_0^T dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{2n-1}}dt_{2n}\right.$$
$$\left.\times e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a}Z_1 e^{+\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1} dt\omega_a}Z_2^*\ldots e^{+\frac{i}{2}\int_{t_{2n}}^{t_{2n-1}} dt\omega_a}Z_{2n}^* e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_{2n}} dt\omega_a}\right], \tag{4.33}$$

et

$$R_{12}(Z,T)=-R_{21}^*(Z,T)=-i\lambda\int_0^T dt_1 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a}Z_1R_{11}^*(Z,t_1), \tag{4.34}$$

qui peut être réarrangé en expression (38) sous forme de quatre termes:

$$K(f,i;T)=exp\left\{\left(\overline{\alpha}_f,\overline{\beta}_f\right)\begin{pmatrix}K_{11}(Z,T) & K_{12}(Z,T)\\ K_{21}(Z,T) & K_{22}(Z,T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.35}$$

Le premier terme de (4.35) par exemple s'écrira comme suit:

$$K_{11}(Z,T)=K^+(Z_f,Z_i;T)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-i\lambda)^{2n}\int_0^T dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{2n-1}}dt_{2n}\times\int\frac{d^2Z_1}{2\pi i}\ldots\int\frac{d^2Z_{2n}}{2\pi i}\right.$$
$$\left.\times K^+(Z_f,Z_1,T-t_1)Z_1K^-(Z_1,Z_2,t_2-t_1)Z_2^*\times\ldots\times Z_{2n}^*K^+(Z_{2n},Z_i,t_{2n}-0)\right], \tag{4.36}$$

où

$$K^{\pm}(Z'',Z';t'',t')=\int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ\ exp\left\{i\int_{t'}^{t''}dt\left[\frac{i}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-(\Omega-g(t))Z^*Z\pm\frac{\omega_a}{2}\right]\right\}. \tag{4.37}$$

Nous intégrons sur toutes les variables Z_n dans (4.37) et développons le premier terme dans l'exponentielle de $K^{\pm}$

$$K^{\pm}(Z'',Z';t'',t')=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z''^{*},Z')^{k}}{k!}\,exp\left\{-i\left[k\left(\Omega(t''-t')+\int_{t'}^{t''}g(t)dt\right)\pm\frac{\omega_{a}}{2}(t''-t')\right]\right\}. \tag{4.38}$$

Par conséquence, (4.36) devient:

$$K_{11}(Z,T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(Z_f^{*}Z_i)^{k}}{k!}exp\left[-i[k\left(\Omega T+\int_{0}^{T}g(t)dt\right)+\frac{\omega_a}{2}T]\right]\right\}$$
$$\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}[-f^{2}]^{n}\int_{0}^{T}dt_{1}e^{+i\int\Delta(t_1)dt_1}\int_{0}^{t_1}dt_{2}e^{-i\int\Delta(t_2)dt_2}...\int_{0}^{t_{2n-1}}dt_{2n}e^{-i\int\Delta(t_{2n})dt_{2n}}\right], \tag{4.39}$$

où

$$\Delta(t_j)=\Delta-g(t_j)=\omega_a-\Omega-g(t_j), \tag{4.40}$$

est le désaccord de l'intéraction atome-champ, et:

$$f=\lambda\sqrt{k+1}. \tag{4.41}$$

Il est clair que, si le terme d'interaction dépendant du temps n'est pas pris en compte $\left(\Delta(t_j)=\Delta\right)$, le cas traité dans les références [16],[42,43] et [46] est obtenu. Dans ce qui suit, nous allons considérer le cas d'un champ dépendant du temps, on va spésialiser dans le cas où $g(t)=gt$. Par conséquent, l'expression (4.39) sera comme suit:

$$K_{11}(Z,T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(Z_f^{*}Z_i)^{k}}{k!}exp\left[-i[k\left(\Omega T+\frac{g}{2}T^{2}\right)+\frac{\omega_a}{2}T]\right]\right\}$$
$$\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}[2\chi_n]^{n}\int_{\eta(0)}^{\eta(T)}d\eta_{1}e^{-\eta_1^2}\int_{\eta(0)}^{\eta_1}d\eta_{2}e^{+\eta_2^2}...\int_{\eta(0)}^{\eta_{2n-1}}d\eta_{2n}e^{+\eta_{2n}^2}\right], \tag{4.42}$$

où les nouveaux paramètres ont été introduit:

$$\eta_j=\eta(t_j)=\frac{i+1}{2}\frac{gt_j-\Delta}{\sqrt{g}},\qquad et\qquad \chi_k=\frac{if^{2}}{g}. \tag{4.43}$$

Pour evaluons la série de perturbations dans l'élément $K_{11}(Z,T)$, on met:

$$G_{11}(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}[2\chi_n]^{n}F_n(\eta), \tag{4.44}$$

avec

$$F_n(\eta)=\int_{\eta(0)}^{\eta(T)}d\eta_{1}e^{-\eta_1^2}\int_{\eta(0)}^{\eta_1}d\eta_{2}e^{+\eta_2^2}...\int_{\eta(0)}^{\eta_{2n-1}}d\eta_{2n}e^{+\eta_{2n}^2}, \tag{4.45}$$

La série $F_n(\eta)$, satisfait l'équation différentielle non homogène suivante:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}F_n(\eta)+2\eta\frac{d}{d\eta}F_n(\eta)=F_{n-1}(\eta). \tag{4.46}$$

Et par là, nous constatons, facilement, que $G_{11}(\eta)$ satisfaire à l'équation:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}G_{11}(\eta)+2\eta\frac{d}{d\eta}G_{11}(\eta)-2\chi_k G_{11}(\eta)=2\chi_k. \tag{4.47}$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentiel d'Hermite [33], dont la solution sous les conditions initiale $G_{11}(\eta(0))=0$ *et* $G'_{11}(\eta(0))=0$, donnée par:

$$G_{11}(\eta)=e^{i(\Delta T-\frac{g}{2}T^2)}\left[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)\,{}_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]-1, \tag{4.48}$$

où

$$C(1)=\frac{c_1}{c} \quad et \quad C(2)=\frac{c_2}{c} \tag{4.49}$$

avec

$$\begin{cases} c_1={}_1F_1(\frac{\chi_k}{2};\frac{1}{2};\eta^2(0)), \\ c_2=-H_{-\chi_k}(\eta(0)), \end{cases} \tag{4.50}$$

et

$$c=H_{-(\chi_k+1)}(\eta(0))\,{}_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(0))-H_{-\chi_k}(\eta(0))\,{}_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(0)), \tag{4.51}$$

où $H_n(x)$ et ${}_1F_1(\alpha;\beta;\gamma)$ sont les fonctions d'Hermite et Hypergeometrique confluente respectivement.

Le résultat final de $K_{11}(Z,T)$ est donnée par la forme compacte suivante:

$$\begin{aligned} K_{11}(Z,T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}&\left\{\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}exp\left[-i[k\left(\Omega T+\frac{g}{2}T^2\right)+\frac{\omega_a}{2}T]\right]\right\} \\ &\times e^{i(\Delta T-\frac{g}{2}T^2)}\left[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)\,{}_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))\right], \end{aligned} \tag{4.52}$$

et de la même manière, le calcul de tous les autres éléments en (4.35) est réalisé. Le résultat est:

$$\begin{aligned} K(f,i;T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}&\left\{\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}e^{-i[k\left(\Omega T+\frac{g}{2}T^2\right)+\frac{\omega_a}{2}T]}\right. \\ &\times\left[\bar{\alpha}_f\alpha_i e^{i(\Delta T-\frac{g}{2}T^2)}[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)\,{}_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))]\right] \\ &\times\bar{\alpha}_f\beta_i[C(1)H_{-\chi_k}(\eta(T))+C(2)\,{}_1F_1(\frac{\chi_k}{2};\frac{1}{2};\eta^2(T))] \\ &\times\bar{\beta}_f\alpha_i[C(1)H_{-\chi_k}(\eta(T))+C(2)\,{}_1F_1(\frac{\chi_k}{2};\frac{1}{2};\eta^2(T))]^* \\ &\left.\times\left[\bar{\beta}_f\beta_i e^{-i(\Delta T-\frac{g}{2}T^2)}[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)\,{}_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))]\right]^*\right\}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Notre probléme est ainsi résolu. Nous allons maintenant extraire les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution.

Utilisant (4.16-4.19), puis intégrer sur Z, on aura les résultats suivants:

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i[(k+1)(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)-\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]|k\rangle\langle k|, \tag{4.54}$$

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i[k(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)+\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-\chi_k}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{\chi_k}{2};\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]|k+1\rangle\langle k|, \tag{4.55}$$

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i[k(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)+\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-\chi_k}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{\chi_k}{2};\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]^*|k\rangle\langle k+1|, \tag{4.56}$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i[(k-1)(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)+3\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]^*|k+1\rangle\langle k+1|. \tag{4.57}$$

et par la suite, la fonction d'onde d'aprés (4.23) s'écrite par la forme suivante:

$$\Psi(T)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\omega_l\begin{pmatrix} e^{-i[(k+1)(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)-\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-(\chi_k+1)}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_k+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]|k\rangle\langle k||l\rangle \\ e^{-i[k(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)+\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-\chi_k}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{\chi_k}{2};\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]|k+1\rangle\langle k||l\rangle \end{pmatrix}, \tag{4.58}$$

comme $\langle k|l\rangle=\delta_{k,l}$, on obtient le résultat final de la fonction d'onde:

$$\Psi(T)=\sum_{l=0}^{\infty}\omega_l\begin{pmatrix} e^{-i[(l+1)(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)-\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-(\chi_l+1)}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{1}{2}(\chi_l+1);\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]|l\rangle \\ e^{-i[l(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)+\frac{\omega_a}{2}T]}\left[C(1)H_{-\chi_l}(\eta(T))+C(2)_1F_1(\frac{\chi_l}{2};\frac{1}{2};\eta^2(T))\right]|l+1\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

Les mêmes fonctions d'onde ceux obtenus par résolution de l'équation de Schrödinger [45].

4.3.2. Intéraction entre un champ éléctromagnétique et atome à deux niveaux avec un paramètre de couplage dépendant du temps

Maintenant, considérons le cas où le paramètre de couplage atome-champ est dépendant du temps. L'Hamiltonien de ce système est donné par l'expression suivante:

$$H(t)=H_0+H_{int}, \tag{4.60}$$

avec

$$H_0=\omega(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}), \tag{4.61}$$

et

$$H_{int}=\frac{\omega_a}{2}\sigma_z+\lambda(t)(a\sigma_++a^{\dagger}\sigma_-), \tag{4.62}$$

où $\lambda(t)$ est une fonction réelle dépendante du temps.

Selon la mécanique quantique habituelle, ce problème a été étudié dans le cas plus généralisé pour le modèle de J-C [47,48].

La formulation intégrale de chemin pour ce système est la suivante:

$$K(f,i;T)=\int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i\omega(\bar{Z}Z+\frac{1}{2})\right]\right\}$$
$$\times\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n-\bar{\beta}_n\beta_n}\prod_{n=1}^{N+1}exp\left\{\left(\bar{\alpha}_n,\bar{\beta}_n\right)R(Z_n,t_n)\begin{pmatrix}\alpha_{n-1}\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.63}$$

avec

$$R(Z_n,t_n)=e^{-i\varepsilon\frac{\omega_a}{2}\sigma_z}+i\varepsilon Q(Z_n,t_n), \tag{4.64}$$

où

$$Q(Z_n,t_n)=\lambda(t)\begin{pmatrix}0 & -Z_n\\ -Z_n^* & 0\end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

Passons maintenant à l'intégration sur toute les variables de Grassmann (α,β). Ainsi le propagateur prend la forme suivante:

$$K(f,i;T)=\int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i\omega(\bar{Z}Z+\frac{1}{2})\right]\right\}$$
$$\times exp\left\{\left(\bar{\alpha}_f,\bar{\beta}_f\right)R(Z,T)\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.66}$$

avec

$$R(Z,T)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(-1)^n R(Z_n,t_n). \tag{4.67}$$

Ce qui conduit à ecrire les éléments de la matrice $R(Z,T)$ en série de perturbation comme suit:

$$R_{11}(Z,T)=R_{22}^*(Z,T)=e^{-\frac{i}{2}\int_0^T dt\omega_a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-i\right)^{2n}\int_0^T dt_1\int_0^{t_1}dt_2...\int_0^{t_{2n-1}}dt_{2n}\right.$$
$$\left.\times e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a}\lambda(t_1)Z_1 e^{+\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1}dt\omega_a}\lambda(t_2)Z_2^*...e^{+\frac{i}{2}\int_{t_{2n}}^{t_{2n-1}}dt\omega_a}\lambda(t_{2n})Z_{2n}^*e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_{2n}}dt\omega_a}\right], \tag{4.68}$$

et

$$R_{12}(Z,T)=-R_{21}^*(Z,T)=-i\int_0^T dt_1 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a}\lambda(t_1)Z_1R_{11}^*(Z,t_1). \tag{4.69}$$

Cela, nous permet d'exprimer (4.66) comme suit:

$$K(f,i;T)=exp\left\{\left(\bar{\alpha}_f,\bar{\beta}_f\right)\begin{pmatrix}K_{11}(Z,T) & K_{12}(Z,T)\\ K_{21}(Z,T) & K_{22}(Z,T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}. \tag{4.70}$$

Le premier terme de (4.70) s'écrit:

$$K_{11}(Z,T) = K^{+}(Z_f, Z_i; T) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-i)^{2n}\int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n}$$
$$\times\int \frac{d^2 Z_1}{2\pi i}...\int \frac{d^2 Z_{2n}}{2\pi i} K^{+}(Z_f, Z_1, T-t_1)\lambda(t_1)Z_1$$
$$\times K^{-}(Z_1, Z_2, t_2 - t_1)Z_2^{*}\times ...\times \lambda(t_{2n})Z_{2n}^{*}K^{+}(Z_{2n}, Z_i, t_{2n}-0)\Big], \tag{4.71}$$

où

$$K^{\pm}(Z'', Z'; t'', t') = \int DZ^{*}DZ \ exp\left\{ i\int_{t'}^{t''} dt \left[\frac{i}{2}(Z^{*}Z - ZZ^{*}) - \omega(Z^{*}Z + \frac{1}{2}) \pm \frac{\omega_a}{2} \right] \right\}. \tag{4.72}$$

Nous intégrons sur toutes les variables Z_n dans (4.72) et développons le premier terme dans l'exponentielle de $K^{\pm}$

$$K^{\pm}(Z'', Z'; t'', t') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z''^{*}, Z')^{k}}{k!} \ exp\left\{ -i\left[\omega\left(k + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\omega_a}{2} \right](t'' - t') \right\}. \tag{4.73}$$

Ensuite, (4.71) devient:

$$K_{11}(Z,T) = e^{-\frac{|Z_f|^2 + |Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(Z_f^{*} Z_i)^{k}}{k!} exp\left[-i\left(k\omega + \frac{1}{2}(\omega + \omega_a) \right) T \right] \right\}$$
$$\times\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} [-f^2]^n \int_0^T dt_1 \lambda(t_1) e^{+i\Delta dt_1} \int_0^{t_1} dt_2 \lambda(t_2) e^{-i\Delta dt_2} ... \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \lambda(t_{2n}) e^{-i\Delta dt_{2n}} \right], \tag{4.74}$$

où

$$\Delta = \omega_a - \omega \quad et \quad f = \sqrt{k+1}. \tag{4.75}$$

Afin de déterminer la série de perturbation dans l'expression (4.74), nous suivons les mêmes étapes précédentes. On met:

$$G_{11}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-f^2]^n \int_0^T dt_1 \lambda(t_1) e^{+i\Delta dt_1} \int_0^{t_1} dt_2 \lambda(t_2) e^{-i\Delta dt_2} ... \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \lambda(t_{2n}) e^{-i\Delta dt_{2n}}, \tag{4.76}$$

on trouve que $G_{11}(t)$ satisfait l'équation suivante:

$$\frac{d^2}{dt^2} G_{11}(t) - (i\Delta + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}) \frac{d}{dt} G_{11}(t) + f^2 \lambda^2 G_{11}(t) = -f^2 \lambda^2. \tag{4.77}$$

Dans ce qui suit, nous prenons le paramètre de couplage dépendant du temps de la forme:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \ sech(\frac{t}{2\tau}), \tag{4.78}$$

où τ est l'échelle de temps caractéristique.

Maintenant, nous utilisons les changements suivants:

$$t = \frac{\tau}{2} ln(\frac{z}{1-z}), \tag{4.79}$$

par conséquence:

$$\lambda(t)=\lambda_0\sqrt{z(1-z)}, \tag{4.80}$$

qui tourne l'équation (4.77) en:

$$z(1-z)\frac{d^2G_{11}}{dz^2}+(c-z)\frac{dG_{11}}{dt}+a^2G_{11}=-a^2, \tag{4.81}$$

où

$$c=\frac{1-i\Delta\tau}{2} \quad et \quad a=2\lambda_0 f\tau. \tag{4.82}$$

C'est l'équation Hypergeometrique avec $(b=-a)$, ainsi:

$$G_{11}(t)=\left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]-1, \tag{4.83}$$

avec:

$$\begin{cases} C_1=(1-z_0)^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z_0) \\ C_2=\dfrac{a^2z_0}{c(1-c)}\left(\dfrac{z_0}{1-z_0}\right)^{c-1}F(a+1,-a+1,c+1;z_0) \end{cases} \quad avec:\ z_0=z(t=0) \tag{4.84}$$

La forme finale de $K_{11}(Z,T)$ est donnée par:

$$K_{11}(Z,T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}e^{-i\left(k\omega+\frac{1}{2}(\omega+\omega_a)\right)T} \times\left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]. \tag{4.85}$$

Par la suite, on trouve:

$$K_{12}(Z,T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}e^{-i\left(k\omega+\frac{1}{2}(\omega+\omega_a)\right)T} \times\frac{a}{|1-c|}z^{1-c}\left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]. \tag{4.86}$$

Passons maintenant à déterminer les fonctions d'onde correspondentes. De la même manière, que dans la section précédente, on peut facilement voir que les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution sont respectivement:

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i\left(k\omega+\frac{1}{2}(\omega+\omega_a)\right)T}\left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]|k\rangle\langle k|, \tag{4.87}$$

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i\left(k\omega+\frac{1}{2}(\omega+\omega_a)\right)T}\frac{a}{|1-c|}z^{1-c}\left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]|k+1\rangle\langle k|. \tag{4.88}$$

Et par là, on peut facilement déduire la fonction d'onde, on la trouve:

$$\Psi(T)=\sum_{l=0}^{\infty}\omega_l e^{-i[(l+1)(\frac{g}{2}T^2+\Omega T)-\frac{\omega_a}{2}T]}$$
$$\times\begin{pmatrix} \left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]|l\rangle \\ \frac{a}{|1-c|}z^{1-c}\left[C_1F(a,-a,c;z)+C_2z^{1-c}F(a-c+1,-a-c+1,2-c;z)\right]|l+1\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.89}$$

Ce résultat est en accord avec [47].

4.3.3. Intéraction entre un champ éléctromagnétique et atome à deux niveaux en présence d'un champ gravitationnel homogène classique

Récemment, les développements des expériences d'optique atomique ont permis de créer des nuages et des faisceaux atomiques à très faible vitesse [49]. Dans cette situation, l'influence de la gravité devient importante et ne peut être négligée. Il est évident que pour des atomes se déplaçant à une vitesse de quelques millimètres ou centimètres par seconde pendant une durée de plusieurs millisecondes ou plus, l'influence de l'accélération de la Terre devient importante [50]. Pour cette raison, nous nous consacrons à ce modèle d'interaction. On va étudier par l'approche intégrale de chemin le problème dans laquelle un atome à deux niveaux placé dans une onde éléctromagnétique quantifiée sous l'effet de champ gravitationnel.

Ce probléme a été éffectué selon la mécanique quantique habituelle [51]. Sa dynamique est décrite par l'Hamiltonien:

$$H(t)=H_0+H_{int}, \tag{4.90}$$

avec

$$H_0=\frac{p^2}{2m}-mgr+\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2}), \tag{4.91}$$

et

$$H_{int}=\frac{\omega_a}{2}\sigma_z+\lambda(e^{+iqr}a\sigma_++e^{-iqr}a^\dagger\sigma_-). \tag{4.92}$$

où q est le vecteur d'onde, p et r désignent, respectivement, les opérateurs de quantité de mouvement et la position du centre de masse atomique et g est l'accélération gravitationnelle de la Terre.

Il convient de noter que, dans la description semi-classique, le système a été étudié par résolution directe de l'équation de Schrödinger [52], puis par le formalisme intégrale de chemin utilisant les états cohérent fermionique [53].

En vue de construire une représentation intégrale de chemin pour ce problème, nous designe par r la variable réelle qui d'écrite la position de l'atome, avec le projecteur correspondant:

$$\int|r\rangle\langle r|dr^3=1, \tag{4.93}$$

et nous allons considérer l'état quantique $|r,Z,\alpha,\beta\rangle$ reliant le mouvement extérieur et intérieur de l'atome. En tenant compte du fait que:

$$\langle r_n | e^{-i\varepsilon \frac{p^2}{2m}} | r_{n-1} \rangle = (\frac{m}{2\pi i\varepsilon})^{3/2} exp\left\{ i\left[\frac{m}{2\varepsilon}(r_n - r_{n-1})^2 \right] \right\}, \tag{4.94}$$

ce qui permet d'avoir le propagateur par la forme suivante:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) = & \lim_{N\to\infty} (\frac{m}{2\pi i\varepsilon})^{3N/2} \int \prod_{n=1}^{N+1} exp\left\{ i\left[\frac{m}{2\varepsilon}(r_n - r_{n-1})^2 + \varepsilon m g r_n \right] \right\} \\ & \times \int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ \; exp\left\{ \int_0^T dt \left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z} - Z\dot{\bar{Z}}) - i\omega(\bar{Z}Z + \frac{1}{2}) \right] \right\} \\ & \times \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int d\bar{\alpha}_n d\alpha_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\alpha}_n\alpha_n - \bar{\beta}_n\beta_n} \prod_{n=1}^{N+1} exp\left\{ \left(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n \right) R(Z_n, r_n, t_n) \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \tag{4.95}$$

avec

$$R(Z_n, r_n, t_n) = e^{-i\varepsilon \frac{\omega_a}{2}\sigma_z} + i\varepsilon Q(Z_n, r_n, t_n), \tag{4.96}$$

où

$$Q(Z_n, r_n, t_n) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda e^{+iqr_n} Z_n \\ -\lambda e^{-iqr_{n-1}} Z_n^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.97}$$

Pour effectuer les intégrales, il faut d'abord simplifiée la matrice d'intéraction. Pour cela nous éliminons les termes $e^{\pm iqr}$ à l'aide du changement des variables suivant:

$$\begin{cases} \alpha \to \eta \\ \alpha_n = e^{+iqr_n}\eta_n \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \bar{\alpha} \to \bar{\eta} \\ \bar{\alpha} = e^{-iqr_n}\bar{\eta} \end{cases} \tag{4.98}$$

Ceci transforme la matrice d'interaction comme suit:

$$\left(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n \right) R(Z_n, r_n, t_n) \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\bar{\eta}_n, \bar{\beta}_n \right) R'(Z_n, r_n, t_n) \begin{pmatrix} \eta_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{4.99}$$

où

$$R'(Z_n, r_n, t_n) = \begin{pmatrix} (1 - i\varepsilon\frac{\omega_a}{2})e^{iq\Delta r_n} & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 1 + i\varepsilon\frac{\omega_a}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.100}$$

avec:

$$\Delta r_n = r_n - r_{n-1}. \tag{4.101}$$

Au cours du développement de,

$$e^{iq\Delta r_n} = 1 + iq\Delta r_n + \frac{1}{2}q^2(\Delta r_n)^2 + O(\Delta r_n)^3, \tag{4.102}$$

comme habituellement le cas dans les techniques d'intégrale de chemin, nous allons estimer le terme $(\Delta r_n)^2$ présent dans l'action par $i\varepsilon / m$, ce qui traduit par un potentiel effectif:

$$R'(Z_n,r_n,t_n)=\begin{pmatrix} 1-i\varepsilon\frac{\omega_a}{2}+iq\Delta r_n+i\varepsilon\frac{q^2}{2m} & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 1+i\varepsilon\frac{\omega_a}{2}\end{pmatrix}. \tag{4.103}$$

Il est mieux de linéariser l'énergie cinétique en utilisant l'espace des phases, puis intégrer sur r, on utilise l'identité suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}exp\left(\frac{-i\varepsilon}{2m}p_n^2+ip_n\Delta r_n\right)=(\frac{m}{2\pi i\varepsilon})^{3/2}exp\left(\frac{im}{2\varepsilon}(\Delta r_n)^2\right), \tag{4.104}$$

ainsi, l'expression du propagateur peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} K(f,i;T)=&\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N}d^3r_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\prod_{n}^{N+1}exp\left[\frac{-i\varepsilon}{2m}p_n^2+ip_n\Delta r_n+i\varepsilon mgr_n\right]\\ &\times\int_{Z_i}^{Z_f}D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i\omega(\bar{Z}Z+\frac{1}{2})\right]\right\}\\ &\times\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\eta}_n d\eta_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\eta}_n\eta_n-\bar{\beta}_n\beta_n}\prod_{n=1}^{N+1}exp\left\{\left(\bar{\eta}_n,\bar{\beta}_n\right)R'(Z_n,r_n,t_n)\begin{pmatrix}\eta_{n-1}\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}\right\}, \end{aligned} \tag{4.105}$$

avec

$$R'(Z_n,r_n,t_n)=\begin{pmatrix} 1-i\varepsilon(\frac{\omega_a}{2}+\frac{q^2}{2m}+\frac{qp_n}{m}) & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 1+i\varepsilon\frac{\omega_a}{2}\end{pmatrix}. \tag{4.106}$$

Clairement, l'argument de la fonction de Dirac $\delta(\dot{p}-mg)$ signifie que la particule n'est soumise qu'à l'action de la gravitation. La quantité de mouvement de l'atome est:

$$p_n=mgt_n+p_0 \quad où \quad (p_0\ constant) \tag{4.107}$$

La contribution de la fonction linéaire de temps dans le calcul du propagateur a le résultat suivant:

$$\begin{aligned} K(f,i;T)=&\int\frac{d^3p_0}{(2\pi)^3}e^{i(mgt+p_0)r|_0^T}e^{-i(\frac{m}{6}g^2T^3+\frac{p_0^2}{2m}T+\frac{1}{2}gp_0T^2)}\\ &\times\int_{Z_i}^{Z_f}D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i\omega(\bar{Z}Z+\frac{1}{2})\right]\right\}\\ &\times\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\eta}_n d\eta_n d\bar{\beta}_n d\beta_n e^{-\bar{\eta}_n\eta_n-\bar{\beta}_n\beta_n}\prod_{n=1}^{N+1}exp\left\{\left(\bar{\eta}_n,\bar{\beta}_n\right)R'(Z_n,r_n,t_n)\begin{pmatrix}\eta_{n-1}\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}\right\}, \end{aligned} \tag{4.108}$$

avec

$$R'(Z_n,r_n,t_n)=\begin{pmatrix} 1-i\varepsilon(\frac{\omega_a}{2}+\frac{q^2}{2m}+qgt_n+\frac{qp_0}{m}) & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 1+i\varepsilon\frac{\omega_a}{2}\end{pmatrix}. \tag{4.109}$$

Comme dernière étape, nous allons introduire le changement suivant:

$$\begin{cases}(\eta,\beta)\rightarrow(\theta,\varphi) \\ \begin{pmatrix}\eta_n \\ \beta_n\end{pmatrix}=e^{-\frac{i}{2}(\frac{q^2}{2m}t_n+qgt_n^2+\frac{qp_0}{m}t_n)}\begin{pmatrix}\theta_n \\ \varphi_n\end{pmatrix}\end{cases} \quad et \quad \begin{cases}(\bar{\eta},\bar{\beta})\rightarrow(\bar{\theta},\bar{\varphi}) \\ \left(\bar{\eta}_n,\bar{\beta}_n\right)=e^{+\frac{i}{2}(\frac{q^2}{2m}t_n+qgt_n^2+\frac{qp_0}{m}t_n)}(\bar{\theta}_n,\bar{\varphi}_n)\end{cases} \tag{4.110}$$

ainsi, le propagateur prend la forme simplifiée suivante:

$$\begin{aligned}K(f,i;T)=&\int\frac{d^3p_0}{(2\pi)^3}e^{-(mgt+p_0)r|_0^T}e^{-i(\frac{m}{6}g^2T^3+\frac{p_0^2}{2m}T+\frac{1}{2}gp_0T^2)} \\ &\times\int_{Z_i}^{Z_f}D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i\omega(\bar{Z}Z+\frac{1}{2})\right]\right\} \\ &\times\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int d\bar{\theta}_n d\theta_n d\bar{\varphi}_n d\varphi_n e^{-\bar{\theta}_n\theta_n-\bar{\varphi}_n\varphi_n}\prod_{n=1}^{N+1}exp\left\{\left(\bar{\theta}_n,\bar{\varphi}_n\right)R''(Z_n,r_n,t_n)\begin{pmatrix}\theta_{n-1} \\ \varphi_{n-1}\end{pmatrix}\right\},\end{aligned} \tag{4.111}$$

où

$$R''(Z_n,r_n,t_n)=\begin{pmatrix}1-\frac{i}{2}\varepsilon\Omega(p,g,t_n) & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 1+\frac{i}{2}\varepsilon\Omega(p,g,t_n)\end{pmatrix}, \tag{4.112}$$

avec

$$\Omega(p,g,t_n)=\omega_a+\frac{q^2}{2m}+qgt_n+\frac{qp_0}{m}. \tag{4.113}$$

La matrice $R''(Z_n,r_n,t_n)$ peut l'écrire à la forme la plus commode comme suit:

$$R''(Z_n,r_n,t_n)=e^{-\frac{i}{2}\varepsilon\Omega(p,g,t_n)\sigma_z}+i\varepsilon Q''(t_n), \tag{4.114}$$

avec

$$Q''(t_n)=\begin{pmatrix}0 & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 0\end{pmatrix}. \tag{4.115}$$

On Intégre sur toutes les variables de Grassmann (θ,φ), (4.111) devient:

$$\begin{aligned}K(f,i;T)=&\int\frac{d^3p_0}{(2\pi)^3}e^{i(mgt+p_0)r|_0^T}e^{-i(\frac{m}{6}g^2T^3+\frac{p_0^2}{2m}T+\frac{1}{2}gp_0T^2)} \\ &\times\int_{Z_i}^{Z_f}D\bar{Z}DZ\ exp\left\{\int_0^T dt\left[-\frac{1}{2}(\bar{Z}\dot{Z}-Z\dot{\bar{Z}})-i\omega(\bar{Z}Z+\frac{1}{2})\right]\right\} \\ &\times exp\left\{\left(\bar{\theta}_f,\bar{\varphi}_f\right)R''(Z,r,T)\begin{pmatrix}\theta_i \\ \varphi_i\end{pmatrix}\right\},\end{aligned} \tag{4.116}$$

avec

$$R''(Z,r,T)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(-1)^nR''(Z_n,t_n). \tag{4.117}$$

On peut facilement obtenir la représentation en série suivante des éléments $R''(Z,r,T)$ comme suit (à la limite continue):

$$
\begin{aligned}
R''(Z,r,T) &= e^{-\frac{i}{2}\int_0^T dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} + i\int_0^T dt_1 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} Q''(t_1) e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_1} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} \\
&+ (i)^2 \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} Q''(t_1) e^{-\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} Q''(t_2) e^{-\frac{i}{2}\int_{t_3}^{t_2} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} \\
&+ \ldots + (i)^N \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{N-1}} dt_N e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\omega_a\sigma_z} Q''(t_1) e^{-\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} \\
& Q''(t_2) e^{-\frac{i}{2}\int_{t_3}^{t_2} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} Q''(t_3) \ldots Q''(t_{N-1}) e^{-\frac{i}{2}\int_{t_N}^{t_{N-1}} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} Q''(t_N) e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_N} dt\Omega(p,g,t)\sigma_z} + \ldots
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

avec

$$
Q''(t_n) = \begin{pmatrix} 0 & -i\varepsilon\lambda Z_n \\ -i\varepsilon\lambda Z_n^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.119}
$$

Ses éléments sont, respectivement:

$$
\begin{aligned}
R_{11}(Z,T) = R_{22}^*(Z,T) &= e^{-\frac{i}{2}\int_0^T dt\Omega(p,g,t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(-i\lambda)^{2n} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \\
& \times e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\Omega(p,g,t)} Z_1 e^{+\frac{i}{2}\int_{t_2}^{t_1} dt\Omega(p,g,t)} Z_2^* \ldots e^{+\frac{i}{2}\int_{t_{2n}}^{t_{2n-1}} dt\Omega(p,g,t)} Z_{2n}^* e^{-\frac{i}{2}\int_0^{t_{2n}} dt\Omega(p,g,t)} \Big],
\end{aligned}
\tag{4.120}
$$

et

$$
R_{12}(Z,T) = -R_{21}^*(Z,T) = -i\lambda \int_0^T dt_1 e^{-\frac{i}{2}\int_{t_1}^T dt\Omega(p,g,t)} Z_1 R_{11}^*(Z,t_1), \tag{4.121}
$$

ainsi, (4.116) s'exprime comme suit:

$$
K(f,i;T) = \int \frac{d^3 p_0}{(2\pi)^3} e^{-(mgt+p_0)r|_0^T} e^{-i(\frac{m}{6}g^2T^3 + \frac{p_0^2}{2m}T + \frac{1}{2}gp_0T^2)} exp\left\{ \left(\bar{\theta}_f, \bar{\varphi}_f\right) \begin{pmatrix} K_{11}(Z,T) & K_{12}(Z,T) \\ K_{21}(Z,T) & K_{22}(Z,T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.122}
$$

Le premier terme de (4.122) s'écrit comme:

$$
\begin{aligned}
K_{11}(Z,T) = K^+(Z_f, Z_i; T) &+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(-i\lambda)^{2n} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \\
& \times \int \frac{d^2 Z_1}{2\pi i} \ldots \int \frac{d^2 Z_{2n}}{2\pi i} K^+(Z_f, Z_1, T - t_1) Z_1 \\
& \times K^-(Z_1, Z_2, t_2 - t_1) Z_2^* \times \ldots \times Z_{2n}^* K^+(Z_{2n}, Z_i, t_{2n} - 0) \Big],
\end{aligned}
\tag{4.123}
$$

où

$$
K^{\pm}(Z'', Z'; t'', t') = \int_{Z_i}^{Z_f} D\bar{Z}DZ \; exp\left\{ i\int_{t'}^{t''} dt \left[\frac{i}{2}(\bar{Z}\dot{Z} - Z\dot{\bar{Z}}) - \omega(Z^*Z + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\Omega(p,g,t) \right] \right\}. \tag{4.124}
$$

Nous intégrons sur toutes les variables Z_n dans (4.124), le résultat est:

$$K^{\pm}(Z'',Z';t'',t')=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z''^{*},Z')^{k}}{k!}\; exp\left\{-i\left[\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)(t''-t')\pm\frac{1}{2}\int_{t'}^{t''}dt\Omega(p,g,t)\right]\right\}. \qquad (4.125)$$

Ensuit, (4.123) devient:

$$K_{11}(Z,T)=e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z_f^{*}Z_i)^{k}}{k!}exp\left\{-i\left[\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)T+\frac{1}{2}\int_{t'}^{t''}dt\Omega(p,g,t)\right]\right\}$$
$$\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}[-f^{2}]^{n}\int_{0}^{T}dt_1e^{+i\Delta_1(t_1)dt_1}\int_{0}^{t_1}dt_2e^{-i\Delta_1(t_2)dt_2}...\int_{0}^{t_{2n-1}}dt_{2n}e^{-i\Delta_1(t_{2n})dt_{2n}}\right], \qquad (4.126)$$

où

$$f=\sqrt{k+1}, \qquad (4.127)$$

et

$$\Delta_1(t_j)=\frac{1}{2}\left[\omega-\left(\omega_a+3\frac{q^2}{2m}+qgt_j+\frac{qp_0}{m}\right)\right], \qquad (4.128)$$

est le désaccord d'intéraction atome-champ qui dépend de la quantité de mouvement de l'atome et le champ gravitationnel.

Il est facile de montrer que pour $qg\to 0$, à savoir l'influence de la gravité est négligée, alors l'expression de $\Delta_1(t_j)$ est simplifiée et le résultat est réduit au cas stationnaire.

Passons maintenant à déterminer les séries de perturbation dans l'élément $K_{11}(Z,T)$. Nous mettons:

$$G_{11}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[-f^{2}]^{n}F_n(t), \qquad (4.129)$$

via les étapes précédentes, on peut constatons que $G_{11}(t)$ doit satisfaire à l'équation:

$$\frac{d^2}{dt^2}G_{11}(t)+2iqg(t-\frac{\Delta_0}{2qg})\frac{d}{dt}G_{11}(t)+f^{2}G_{11}(t)=-f^{2}, \qquad (4.130)$$

avec

$$\Delta_0=\frac{1}{2}\left[\omega-\left(\omega_a+3\frac{q^2}{2m}+\frac{qp_0}{m}\right)\right]. \qquad (4.131)$$

La solution sous les conditions initiales $G_{11}(0)=0\;\; et\;\; G'_{11}(0)=0$, $G'_{11}(0)=0$ est donnée par:

$$G_{11}(B(T))=e^{i\Delta_1T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T))+C(2)\,{}_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]-1, \qquad (4.132)$$

où

$$C(1)=\frac{c_1}{c}\quad et\quad C(2)=\frac{c_2}{c} \qquad (4.133)$$

avec

$$\begin{cases} c_1 = {}_1F_1(-\frac{1}{2}(A_k+1);\frac{1}{2};B^2(0)) \\ c_2 = H_{(A_k+1)}(B(0)) \end{cases} \tag{4.134}$$

et

$$c = H_{A_k}(B(0))\,{}_1F_1(-\frac{1}{2}(A_k+1);\frac{1}{2};B^2(0)) - H_{(A_k+1)}(B(0))\,{}_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(0)). \tag{4.135}$$

En outre, nous avons:

$$\begin{cases} B(T) = (i+1)(\frac{\sqrt{2}}{2}qgt - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{qg}}\Delta_0) \quad et \quad A_k = -(2+i\beta), \\ avec: \quad \beta = (\frac{y_k(p,g)-\Delta_0^2}{2qg}) \quad et \quad y_k(p,g) = \sqrt{y_k(p,0)^2 + 2iqg}, \end{cases} \tag{4.136}$$

avec $y_k(p,0) = f^2 + \Delta_0^2$, la fréquence de Rabi dépendante de la gravité.

Finalement, le resultat de $K_{11}(Z,T)$ prend la forme suivante:

$$K_{11}(Z,T) = e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} e^{-i\left[k\omega T + \frac{1}{2}\omega T + \frac{1}{2}\left(\omega_a T + \frac{g^2}{2m}T + \frac{1}{2}qgT^2 + \frac{qp_0}{m}T\right)\right]}$$
$$\times e^{i\Delta_1 T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T)) + C(2)\,{}_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]. \tag{4.137}$$

Un calcul semblable nous permet d'obtenir les autres éléments en (4.122):

$$K_{12}(Z,T) = e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} e^{-i\left[k\omega T + \frac{1}{2}\omega T + \frac{1}{2}\left(\omega_a T + \frac{g^2}{2m}T + \frac{1}{2}qgT^2 + \frac{qp_0}{m}T\right)\right]}$$
$$\times\left[C(1)H_{A_k+1}(B(T)) + C(2)\,{}_1F_1(-\frac{A_k+1}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right], \tag{4.138}$$

$$K_{21}(Z,T) = e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} e^{-i\left[k\omega T + \frac{1}{2}\omega T + \frac{1}{2}\left(\omega_a T + \frac{g^2}{2m}T + \frac{1}{2}qgT^2 + \frac{qp_0}{m}T\right)\right]}$$
$$\times\left[C(1)H_{A_k+1}(B(T)) + C(2)\,{}_1F_1(-\frac{A_k+1}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]^*, \tag{4.139}$$

$$K_{22}(Z,T) = e^{-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} e^{-i\left[k\omega T + \frac{1}{2}\omega T + \frac{1}{2}\left(\omega_a T + \frac{g^2}{2m}T + \frac{1}{2}qgT^2 + \frac{qp_0}{m}T\right)\right]}$$
$$\times e^{-i\Delta_1 T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T)) + C(2)\,{}_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]^*. \tag{4.140}$$

Retournons aux anciennes variables de Grassmann (α,β), nous obtenons:

$$K(f,i;T)=\int\frac{d^3p_0}{(2\pi)^3}e^{i(mgt+p_0)r|_0^T}e^{-i(\frac{m}{6}g^2T^3+\frac{p_0^2}{2m}T+\frac{1}{2}gp_0T^2)}$$
$$\times exp\left\{\left(\overline{\alpha}_f,\overline{\beta}_f\right)S(T)\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}\right\}, \tag{4.141}$$

avec

$$S(T)=e^{-\frac{i}{2}(\frac{q^2}{2m}T+\frac{1}{2}qgT^2+\frac{qp_0}{m}T)}$$
$$\times\begin{pmatrix}e^{iqr_f} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{11}(T) & K_{12}(T)\\ K_{21}(T) & K_{22}(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-iqr_i} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4.142}$$

Pour les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution, peut facilement être déduire, on les trouve:

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow}=f(p,g,t)e^{iq(r_f-r_i)}\sum_{k=0}^{\infty}e^{i\Delta_1T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]|k\rangle\langle k|, \tag{4.143}$$

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow}=f(p,g,t)e^{-iqr_i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[C(1)H_{A_k+1}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k+1}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]|k+1\rangle\langle k|, \tag{4.144}$$

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow}=f(p,g,t)e^{iqr_i}\sum_{k=0}^{\infty}\left[C(1)H_{A_k+1}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k+1}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]^*|k\rangle\langle k+1|, \tag{4.145}$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow}=f(p,g,t)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i\Delta_1T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]^*|k+1\rangle\langle k+1|, \tag{4.146}$$

avec

$$f(p,g,t)=\int\frac{d^3p_0}{(2\pi)^3}e^{i(mgt+p_0)r|_0^T}e^{-i(\frac{m}{6}g^2T^3+\frac{p_0^2}{2m}T+\frac{1}{2}gp_0T^2)}$$
$$\times e^{-i\left[k\omega T+\frac{1}{2}\omega T+\frac{1}{2}(\omega_aT+\frac{g^2}{2m}T+\frac{1}{2}qgT^2+\frac{qp_0}{m}T)\right]}$$
$$\times e^{-\frac{i}{2}(\frac{q^2}{2m}T+\frac{1}{2}qgT^2+\frac{qp_0}{m}T)}. \tag{4.147}$$

Pour le système atomique considéré, la fonction d'onde s'écrit sous la forme:

$$\Psi(p,g;T)=\int d^3p\hat{U}(p,g;T)\Psi(p,g;0), \tag{4.148}$$

où

$$\Psi(p,g;0)=\int d^3p\varphi(p)\sum_{l=0}\omega_l\begin{pmatrix}|l\rangle\\ 0\end{pmatrix}, \tag{4.149}$$

peut être déduite, elle devient égale à:

$$\Psi(p,g;T)=\sum_{k=0}\sum_{l=0}\omega_l f(p,g;T)$$
$$\times\begin{pmatrix} e^{iq(r_f-r_i)}e^{i\Delta_1 T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]\left|k\right\rangle\left\langle k\right|\left|l\right\rangle \\ e^{-iqr_i}\left[C(1)H_{A_k+1}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k+1}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]\left|k+1\right\rangle\left\langle k\right|\left|l\right\rangle \end{pmatrix}, \qquad (4.150)$$

comme $\left\langle k\middle|l\right\rangle=\delta_{k,l}$, le résultat final de la fonction d'onde est:

$$\Psi(p,g;T)=\sum_{k=0}\omega_k f(p,g;T)$$
$$\times\begin{pmatrix} e^{iq(r_f-r_i)}e^{i\Delta_1 T}\left[C(1)H_{A_k}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]\left|k\right\rangle \\ e^{-iqr_i}\left[C(1)H_{A_k+1}(B(T))+C(2)_1F_1(-\frac{A_k+1}{2};\frac{1}{2};B^2(T))\right]\left|k+1\right\rangle \end{pmatrix}. \qquad (4.151)$$

Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus dans la référence [51].

Cette partie a fait l'objet d'un travail publié dans [54].

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le formalisme intégrale de chemin sur trois problémes concernant le modèle de J-C dans les cas où l'intéraction dépendante du temps:

-l'intéraction entre un champ éléctromagnétique dépendant du temps et atom à deux niveaux.

-l'intéraction entre un champ éléctromagnétique et atom à deux niveaux avec un paramètre de couplage dépendant du temps.

-l'intéraction entre un champ éléctromagnétique et atom à deux niveaux en présence d'un champ gravitationnel homogène classique.

On a commencé par la présentation du formalisme pour le modèle J-C standard dans la base des états cohérents fermioniques et bosoniques, ainsi que l'expression de la fonction d'onde a été éxtraire.

Pour les systèmes considérés, il est parfois plus commode de travailler dans l'espace des phases ce qui permet de simplifier les calculs via certaines transformations. Aprés avoir une forme simple du propagateur, on a fait les calculs directs sur les variables de spin, puis sur les variables bosoniques. Les résultats est donnée sous forme des séries de perturbations, qui se résument exactement en termes des fonctions spéciales, et les fonctions d'ondes sont facilement déterminées.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail était d'étudier par la téchnique des l'intégrales de chemin les systèmes quantiques dépendantes du temps, nous avons considéré essentiellement l'intéraction d'un atome à deux niveau avec un champ éléctromagnétique dans le cadre d'un champ classique et le modèle de Jaynes-Cummings.

On a basé sur l'approche de la série de perturbation, par là, on a proposé une alternative méthode pour résumer cette série dans les cas des intéractions dépendante du temps, où on arrive à trouver une formule récurrente sur les termes, qui génère la série de perturbation, et par la suite on arrive à déduire le propagateur du problème considéré. Les probabilités de transition et les fonctions d'onde correspondantes ont été déduites en appliquant les principes de la mécanique quantique. Les résultas obtenus sont parfaitement identiques avec ceux qui trouvés par d'autres méthodes standards.

Comme perspectives de ce travail, on espère bien continuer à développer ce formalisme et trouver des méthodes par lesquelles on pourrait résumer les séries de perturbations dans les cas des intéractions dépendante du temps, tout en évitant l'utilisation des équations différentielles.

Références bibliographiques

[1] E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 361 and 489 (1926), 80, 437(1926), 81, 109 (1926).

[2] W. Heisenberg, Zeitsch. f. Phys. 33, 879 (1925).

[3] M. Born and P. Jordan, Zeitsch. f. Phys. 34, 858 (1925).

[4] M. Born , W. Heisenberg and P. Jordan, Zeitsch. f. Phys. 35, 557 (1926).

[5] P. M. A. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. 109, 642 (1925).

[6] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phy. 20, 367 (1948).

[7] R. P. Feynman, Phy. Rev. 76, 769 (1949).

[8] R. P. Feynman, Phy. Rev. 80, 440 (1950).

[9] P. M. A. Dirac, The principles of quantum mechanics (Oxford Clarindon press, London, 1958).

[10] J. Schwinger, Quantum Theory of angular Momentum, edited by L. Biedenharn and H. von Dam (Academic Press, New York, 1965).

[11] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, Coherent States Application in Physics and Mathematical Physics (World Scientific, Singapore, 1985).

[12] J. Klauder, Ann. Phys. 11, 123 (1960).

[13] Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60, 548 (1978).

[14] J. R. Klauder, Phys. Rev. D. 19, 2349 (1979).

[15] T. Boudjedaa, A. Bounames, L. Chetouani, T. F. Hammann and Kh. Nouicer, J. Math.Phys. 36, 1602 (1995).

[16] T. Boudjedaa, A. Bounames, Kh. Nouicer, L. Chetouani and T. F. Hammann, Phys. Scr. 54, 225 (1996).

[17] T. Boudjedaa, A. Bounames, Kh. Nouicer, L. Chetouani and T. F. Hammann, Phys. Scripta. 56, 545 (1998).

[18] A. Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Phys. Scr. 64, 15 (2001).

[19] A. Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Czechoslov. J. Phys. 51, 865 (2001).

[20] A. Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C. 22, 585 (2001).

[21] Kh. Nouicer and L. Chetouani, Phys. Lett. A. 281, 218 (2001).

[22] M. Aouachria and L. Chetouani, Chinese. J. Phys. 40, 496 (2002).

[23] J-P. Gazeau, Coherent States in Quantum Physics (Wiley-VCH, Berlin, 2009).

[24] A. M. Perelomov, Generalized Coherent states and Their Application (Springe-Verlag, Berlin, 1986).

[25] M. Nakamura and K. Kitahara, J. Phys. Soc. Jpn. 60, 1388 (1991).

[26] N. Rosen and C. Zener, Phys. Rev. 40, 502 (1932).

[27] M. D. Levenson, Introduction to Non-linear Laser Spectroscopy (Academic, NY, 1982).
[28] L. Allen and J. H. Eberly, Optical Resonance and Two-level Atoms (Wiley, NY, 1975).
[29] P. Ao and J. Rammer, Phys. Rev. B. 43, 5397 (1991).
[30] I. I. Rabi, Phys. Rev. 51, 652 (1937).
[31] M. J. Tahmasebi and Y. Soboti, Mod. phys.Let. B. 20, 1255 (1992).
[32] F. T. Hioe, Phys. Rev. A. 30, 2100 (1984).
[33] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, NY, 1968).
[34] M. J. Tahmasebi and Y. Sobouti, Mod. phys. Let. B. 5, 1919 (1991).
[35] H. Benkhelil and M. Aouachria, Intelligent Mathematics II: Applied Mathematics and Approximation Theory, Vol 441, pp 73 (Springer, Cham, 2016).
[36] E. T. Jaynes and F. Cummings, Proc. IEEE. 51, 89 (1963).
[37] B. W. Shore and P. L. Knight, J. Mod. Opt. 40, 1195 (1993).
[38] P. L. Knight and P. W. Milonni, Phys. Rep. 66, 21 (1980).
[39] F. Kien and A.S. Shumovsky, Int. J. Mod. Phys. B. 5, 2287 (1991).
[40] K. Zaheer and M. S. Zubairy, Phys. Rev. A. 37, 1628 (1988).
[41] V. Buzek, Czech. J. Phys. B. 39, 757 (1989).
[42] M. Aouachria and Y. Delenda, Int. J. Theor. Phys. 56, 271 (2017).
[43] M. Aouachria and L. Chetouani, Can. J. Phys. 87, 389 (2009).
[44] H. Benkhelil and M. Aouachria, Int. J. Theor. Phys. 59, 3897 (2020).
[45] N. H. Abdel-Wahab and S. Ahmed, Mod. Phys. Lett. A. 34, 1950081 (2019).
[46] M. Aouachria, Int. J. Theor. Phys. 54, 4174 (2015).
[47] A. Dasgupta, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 1, 14 (1999).
[48] A. Joshi, S. V. Lawande, Phys. Rev. A. 48, 2276 (1993).
[49] C. Adams, M. Sigel and J. Mlynek, Phys. Rep. 240, 143 (1994).
[50] A. Kastberg, W. Philips, S. Rolston, R. Spreeuw and P. Jessen, Phys. Rev. Lett. 74, 1542 (1995).
[51] M. Mohammadi, M. H. Naderi and M. Soltanolkotabi, J.Phys. A: Math. Theor. 40, 1377 (2007).
[52] C. Lämmerzahl and C. J. Bordé, Phys. Lett. A. 203, 59 (1995).
[53] M. Aouachria and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C. 25, 333 (2002).
[54] H. Benkhelil, Indian. J. Phys. 97, 255 (2023).

Résumé

Dans le cadre de la mécanique quantique, nous avons traité, par le formalisme des intégrales de Feynman, un ensemble des systèmes quantiques intéressant la physique théorique. Ces systèmes concernent principalement l'interaction entre un atome à deux niveaux et un champ électromagnétique:

- Traitement des systèmes quantique à deux niveaux dépendant du temps.
- L'action d'un champ magnétique extèrne sur une particule à deux niveaux.
- Les intéractions dépendantes du temps dans le cadre du modèle Jaynes-Cummings.

Nous l'avons abordé ce formalisme selon deux approches bien connu; l'approche de la serie de perturbation et la méthode de la transformation sur les variables de spin, et par la suite, le propagateur relatif aux systèmes considérés on été déterminé. Les propriétés physiques telles que la probabilité de transition et les fonctions d'ondes, ont été alors déterminés exactement.

<u>Mots clés:</u>

Intégrale de chemin, Propagateur, Etats cohérents, Les variables de Grassmann, Système à deux niveaux, Modèle de Jaynes-Cummings, Probabilités de transition, Fonction d'onde.

Abstract

In the framework of quantum mechanics, we have treated, by the Feynman path integral formalism, a set of quantum systems interest to theoretical physics. These systems mainly concern the interaction between a two-level atom and an electromagnetic field:

- Treatment of two-level time-dependent quantum systems.
- The action of an external magnetic field on spinning particle.
- Time-dependent interactions within the framework of the Jaynes-Cummings model.

We have treated this formalism according two well-known approaches; the perturbation series approach and the transformation on spin variables, and thereby the propagator relative to the considered systems has been determined. The physical properties such as transition probability and wave functions were then determined exactly.

<u>Keywords</u>

Path integral, Propagator, Coherent states, Grassmann variables, Two-level system, Jaynes-Cummings model, Transition probabilities, Wave function.

الملخص

في إطار ميكانيكا الكم، عالجنا من خلال صيغة تكاملات فاينمان، مجموعة من الأنظمة المكممة التي تهم الفيزياء النظرية. تتعلق هذه الأنظمة بشكل أساسي بالتفاعل بين ذرة ذات مستويين ومجال كهرومغناطيسي:

- دراسة أنظمة الكم ذات مستويين متعلقة بالزمن.
- تأثير حقل مغناطيسي خارجي متعلق بالزمن على جسيم ذو مستويين.
- تفاعلات متعلقة بالزمن في اطار نموذج جاينس- كومينغ.

تطرقنا لهذه الصيغة وفقًا لمقاربات معروفة؛ مقاربة سلسلة الاضطراب و طريقة التحويلات في متغيرات السبين، حيث تم من خلالها تحديد الناشر المتعلق بالأنظمة التي تم النظر فيها. ثم تم تحديد الخصائص الفيزيائية، مثل احتمال الانتقال و الدالة الموجية بدقة.

<u>الكلمات المفتاحية</u>

تكاملات المسار, الناشر, الحالات المتناسقة, متغيرات غراسمان, نظام ذو مستويين, نموذج جاينس-كامينغ, احتمالات الانتقال, الدالة الموجية.