REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hadj Lakhdar - BATNA 1

Faculté des Sciences de la Matière

Département de physique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

Diplôme de Doctorat En Sciences

Spécialité : Physique Théorique

par :

Hassene BADA

Thème :

Traitement des problèmes relativistes de spin ½ par l'approche des intégrales de chemins

Soutenue le: 13/01/2022

Devant le jury :

Président :	**Delenda Yazid**	Prof.	Université de Batna 1
Rapporteur :	**Aouachria Mekki**	Prof.	Université de Batna 1
Examinateurs :	**Zaim Slimane**	Prof.	Université de Batna 1
	Kamel Khounfais	Prof.	Université de Skikda
	Boudjaadar Djamel	Prof.	Université de Skikda
	Falek Mokhtar	Prof.	Université de Biskra

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier grandement le Professeur Mekki Aouachria du privilège qu'il m'a accordé en étant mon Directeur de thèse. Je lui exprime toute ma gratitude pour sa confiance, sa disponibilité et ses réponses à mes nombreuses sollicitations.

Évidemment, mes vifs remerciements à l'adresse des membres de jury : Prof. Delenda Yazid entant que président, Prof. Zaim Slimane, Prof. Khounfais Kamel, Prof. Boudjaadar Djamel et Prof. Falek Mokhtar pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et la disponibilité dont ils ont fait preuve. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude au feu Prof. Mebarki Noureddine et au Prof. Moumni Mustapha, pour le temps qu'ils ont consacré à l'examinassions ainsi qu'à l'évaluation de cette thèse.

Je désir également remercier tous mes amis de Khenchela et de Batna : Abdeljalil Merdaci, Fateh Sekakra, Bachir Sebaâ et Djamel Arezki qui m'ont toujours apporté leur support moral et intellectuel.

Je voudrais remercier ma sœur Ounnassa et mes frères Zinou et Adel pour leur grand soutien et leur encouragement tout au long de ce travail.

A titre plus personnel, je tiens à témoigner ma reconnaissance à mon épouse Khadidja, qui m'a soutenu dans ce projet de thèse et tout au long de ces dernières années d'étude.

Je garde le mot de fin pour mes parents, mon père Messaoud et ma mère Zineb. Je leur témoigne ma reconnaissance pour leur soutien permanent, pour leur patience et d'avoir été d'un très grand appui moral, matériel et affectif. J'ai une pensée particulière pour mon père qui aurait été très fier de voir l'aboutissement de mon projet d'étude.

Dédicaces

À la mémoire de mon père Messaoud et de mon frère Réda.

À ma mère Zineb.

À mon oncle Khellaf et sa famille.

À mon Épouse Khadidja et à mon Fils Aksel.

À ma sœur Ounnassa et à mes frères : Zine Eddine, Mouhammed Sghir, Adèle, Fayçal et Zinou.

À toutes mes nièces et à tous mes neveux.

Hassene

Hommage

C'est avec une grande tristesse, une douleur et un chagrin profond que nous avons appris le décès soudain d'un membre de jury : Le professeur Noureddine Mebarki. J'eus le plaisir et l'honneur d'avoir Monsieur Mebarki comme professeur de physique et de mathématique lors de mes études de DES et de magistère. Je garde le souvenir d'un professeur passionné, engagé, dynamique et profondément humain. ALLAH YARHMOU.

Hassene

Table des matières

Chapitre 1

Introduction Générale

Les formulations usuels de la mécanique quantique sont bien connues, telles que développées plus ou moins simultanément par Schrodinger, Heisenberg et d'autres dans les années 1920, et qui se sont révélées équivalentes entre elles peu de temps après.

En 1933, Dirac, qui considérait que la formulation Lagrangienne de la mécanique classique était plus fondamentale que celle Hamiltonienne, observa que l'action avait un rôle principal en mécanique classique, mais qu'elle semblait n'avoir aucun rôle important en mécanique quantique, comme on le savait à l'époque. Pour remédier à cette situation, il spécula et conclut que le propagateur en mécanique quantique correspond à $exp(iS/\hbar)$, où S est l'action classique évaluée au long de la trajectoire classique.

En 1948, l'idée de Dirac fut approfondie par Feynman [1], lequel parvint à dériver une nouvelle formulation de la mécanique quantique, basée sur le fait que le propagateur pouvait être écrit comme étant une somme sur tous les chemins possibles entre les points initial et final. Chaque chemin contribue $exp(iS/\hbar)$ au propagateur. Ainsi, alors que Dirac ne considérait que le chemin classique, Feynman démontra que tous les chemins contribuaient : En un sens, la particule quantique prend tous les chemins, et pour chaque chemin les amplitudes s'ajoutent selon la règle habituelle de la combinaison des amplitudes en mécanique quantique.

La formulation de Feynman de la mécanique quantique peut être exprimée par la simple relation :

$$\langle x_f, t_f | \mathbf{U} | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x(t)\, e^{iS[x(t)]/\hbar} \tag{1.1}$$

où $\mathbf{U}$ est l'opérateur d'évolution. Cette relation s'explique ainsi : Pour connaître l'amplitude quantique d'une particule ponctuelle d'atteindre une position finale x_f à l'instant t_f en partant d'une position initiale x_i à l'instant t_i, on intègre sur tous les chemins possibles reliant les deux positions avec un facteur de pondération donné par l'action classique pour chaque chemin. D'où le nom « intégrale de chemins ». On note que les kets de la position forment un ensemble complet de bases, et la connaissance de cette amplitude pour tout x est une information suffisante pour tout savoir du système. Cette relation est équivalente à la formulation habituelle de la mécanique quantique. Par ailleurs, et pour de nombreuses raisons, cette formulation est intérssante. À titre d'exemple, puisque les objets de la mécanique quantique, contrairement à la mécanique classique, ne suivent pas une trajectoire précise, mais plutôt une superposition de celles-ci, est contre-intuitif dans lui-même. Cependant, dans la formulation intégrale de chemins de la mécanique quantique, cette propriété est naturellement intégrée dans (1.1) : le fait que nous ne savons pas quel chemin la particule a choisi, même en connaissant les positions initiale et finale est une généralisation naturelle de l'expérience des deux fentes de Young (même si nous savons d'où vient la particule et où elle a frappé l'écran, nous ne savons pas quelle fente elle a traversé). L'intégrale de chemins décrive une expérience à un nombre infini de fente où en raison de ne pas pouvoir spécifier par où passe la particule implique une sommation sur les amplitudes.

En outre, dans la relation (1.1) la trajectoire classique domine l'intégrale de chemins dans les limites infinitésimales de $\hbar$ et l'équation classique du mouvement apparaît de manière très simple étant donné qu'en prenant la limite $\hbar \to 0$, le facteur de pondération $exp(iS/\hbar)$ oscille très rapidement. Par conséquent, nous nous attendons à ce que la contribution principale à l'intégrale de chemins vienne des chemins qui rendent l'action stationnaire. Ceci n'est rien d'autre que la dérivation de l'équation d'Euler–Lagrange à partir de l'action classique.

Aussi, l'approche intégrale de chemins peut également être utilisé pour calculer les fonctions de partition en mécanique statistique car il existe une analogie profonde entre le traitement mathématique des fluctuations thermiques en physique statistique et celui des «fluctuations quantiques» (principe d'incertitude) en physique quantique.

Malgré ses avantages, l'intégrale de chemins de l'électron de Dirac fait toujours face à des problèmes. Ces problèmes sont liés à la fois à la nature discrète du spin et à l'invariance de la vitesse de la lumière dans les référencielles galiléens. En utilisant le formalisme des opérateurs à titre d'exemple, il n'est pas difficile de calculer que les valeurs propres de l'opérateur de vélocité sont égales à $\pm c$. Cela est dû au fait que l'opérateur de la vitesse dans la théorie de Dirac se révèle être un opérateur purement du spin qui a des valeurs propres discrètes. Selon le principe de l'invariance relativiste, si la valeur de vitesse de la particule était $\pm c$, alors elle n'a pas de masse ($m = 0$), ce qui n'est néanmoins pas appliqué à la physique des électrons. De plus, des quantités classiques sont utilisées dans l'approche de Feynman, telles que des trajectoires, et il est inconcevable d'associer une entité physique continue, comme une trajectoire, à ces valeurs propres discrètes. Par conséquent, il est difficile de savoir comment suggérer un modèle d'électron de Dirac qui réponde aux contraintes d'invariance relativistes et décrive le spin , qui est une entité purement discrète sans analogue classique. En fait, beaucoup ont essayé de combiner ces exigences, tels que le modèle super-symétrique de Fradkin [2] fondé sur les variables de Grassmann et les sources impaires, un modèle qui a ensuite été réexaminé par Berezin et Marinov [3], puis repris par Fradkin et Gitman [4]. Ils ont pu construire directement des représentations intégrale de chemins pour des propagateurs relativistes de particules avec et sans spin. Leur formalisme consiste essentiellement à écrire formellement la fonction de Green causale en tant qu'inverse d'un opérateur puis, au moyen d'une intégrale par rapport au temps propre , à formuler cet inverse en tant qu'opérateur d'évolution de Schrödinger régulier. Pour l'équation de Klein-Gordon, ils n'ont utilisé qu'un seul temps d'évolution, appelé temps propre de Schwinger, alors que pour l'équation de Dirac, un temps super-propre a été utilisé. Il consiste en un temps propre constitué d'une partie bosonique, qui est exactement celle de Schwinger, et d'une partie fermionique qui effectue la projection des états de Klein-Gordon sur ceux de Dirac.

Du point de vue calcul, ce formalisme a été construit dans le cas d'un certain nombre d'applications concrètes. Ces applications sont des arrangements spécifiques de champs externes, tels qu'un champ constant, un champ d'ondes planes ou un mélange des deux [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] et des oscillateurs de Dirac [13, 14].

Malgré son importance, l'oscillateur de Dirac a rarement été traité en utilisant la technique de l'intégrale de chemins. Historiquement parlant, l'idée d'oscillateur de Dirac a été abordée pour la première fois par Ito et al. [15] lorsqu'ils ont approché l'équation de Dirac dans le cas d'un potentiel harmonique linéaire $-im\omega\beta\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{r}$. En 1989, ce concept a été approfondi par Moshinsky et Szczepaniak [16]. À l'origine, il était connu sous le nom d'oscillateur de Dirac (OD) [17, 18]. Ils l'appelèrent ainsi car, dans la limite non relativiste, il se comporte comme un oscillateur harmonique avec un terme de couplage spin-orbite fort. Par la suite, en raison de sa grande applicabilité, il est devenu l'objet d'un vaste domaine de recherche dans différents domaines de la physique. L'oscillateur de Dirac apparaît en physique mathématique [19, 20, 21, 22, 23], en physique nucléaire [24, 25, 26], en géométrie non commutative [27, 28, 29, 30] et en optique quantique, pour étudier les propriétés du modèle (Anti) -Jaynes - Cummings [31, 32, 33, 34, 35]. Par ailleurs, il est important de noter que l'oscillateur unidimensionnel de Dirac a eu sa première réalisation expérimentale [36], ce qui donne au système des perspectives d'application prometteuses. L'oscillateur de Dirac en (2 + 1) dimensions a également été étudié dans [37]. De plus, ce système a été proposé dans [38] pour décrire certaines propriétés électroniques du graphène monocouche et bicouche. En physique mathématique, il a également attiré beaucoup d'attention dans le domaine des modèles et des symétries parfaitement solubles . Fait intéressant, même la symétrie de Higgs a été prise en compte dans ce contexte [39].

Dans le deuxième chapitre de cette thése, nous proposons de traiter le problème de de l'oscillateur de Dirac à (2 + 1) dimensions se déplaçant dans un champ électrique uniforme avec l'approche de l'intégrale de chemins. Le fait que nous utilisions l'approche nommée globale dans cet ouvrage redirige, au préalable, notre recherche du propagateur de l'équation de Dirac vers celle du propagateur de sa forme quadratique [40]. Les états superflus ou non physiques résultant de cette procédure sont par la suite écartés de la solution par l'application de l'opérateur de projection globale. Comme le nouvel Hamiltonien est exprimé en utilisant des matrices de Pauli, nous introduisons le spin dans le formalisme de l'intégrale de chemins en les remplaçant par deux oscillateurs fermionique selon le modèle de Schwinger [41]. Il convient de noter qu'une tentative a déjà été faite dans le cas du champ de Dirac pour obtenir un formalisme d'intégrale de chemins similaire au modèle de Schwinger, sans recourir à des sources pour introduire les matrices gamma de Dirac [42]. Au meilleur de notre connaissance, l'oscillateur de Dirac à (2+1) dimensions en présence d'un champ électrique uniforme n'a pas été exploré avec l'approche de l'intégrale de chemins. Ceci est possiblement la première tentative. Nous pensons également que la simplicité de la méthode utilisée ici facilitera l'élargissement de la famille de problèmes résolus par cette technique.

Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous traitons le problème de la particule de l'oscillateur de Dirac à 2+1 dimensions se déplaçant dans un champ électrique uniforme avec l'approche super-symétrique des intégrales de chemins se basant sur la technique des sources de Fradkin et Gitman [4]. Nous adoptons la projection dite globale [40], ce qui conduit à une expression plus simple sans avoir recours au temps propre de type Grassmannien. De plus, en utilisant différentes propriétés de symétrie du propagateur, ce dernier sera représenté sous une forme permettant d'obtenir directement les spineurs propres sous forme normalisée. Nous traitons aussi dans ce chapitre la limite non-relativiste et la densité du courant Au meilleur de notre connaissance, l'oscillateur de Dirac dans un champ électrique uniforme à 2+1 dimensions n'a pas encore été exploré, à date, avec l'approche de l'intégrale de chemins super-symétrique. Ceci en est possiblement la première tentative. De plus, il convient de noter que, dans le calcul du propagateur de particules de Dirac à l'aide de la technique supersy-métrique d'intégrale de chemins, et à quelques rares exceptions près, par exemple [11], les fonctions d'onde ont souvent été calculées à un facteur multiplicatif près ou normalisées à la main en utilisant la condition de normalisation. La méthode utilisée ici permet de dériver les fonctions d'onde directement normalisées à partir du propagateur.

Dans le quatrième chapitre de cette thése nous abordons notre problème, toujours dans le cadre du formalisme super-symétrique des intégrales de chemins, cette fois-ci dans le cas d'absence de confinement. Nous étudions également dans ce chapitre le problème de création de paire.

Chapitre 2

L'oscillateur de Dirac dans un champ électrique uniforme : formalisme et applications

2.1 Introduction

L'intégrale de chemins a grandement contribué à la tentative de réconcilier la description quantique d'un système physique avec son analogue classique. Cependant, il a été démontré que cela ne convenait pas dans le cas de la description du spin, qui est une entité physique purement discrète sans analogue classique, contrairement à l'intégrale de chemins, laquelle repose essentiellement sur des descriptions classiques, telles que des trajectoires. Pour tenter de résoudre cette difficulté, deux catégories de formulation d'intégrale de chemins ont été utilisées. La première décrit la dynamique du spin de boson en utilisant des variables commutatives [1, 43, 44, 45] et la seconde utilise des variables anticommutatives pour décrire la dynamique de spin de fermion [46]. Certains potentiels de cette dernière catégorie ont été traités en utilisant le modèle de Fradkin et Gitman [4], qui présente le propagateur de Dirac en utilisant une intégrale de chemins Grassmanienne.

En relation étroite avec notre étude, nous mentionnons la référence [42], où les auteurs résolvent l'oscillateur de Dirac sans masse à $(2+1)$ dimensions en présence de champs électrique et magnétique perpendiculaires. Les énergies sont obtenues et la fonction d'onde est écrite en termes de polynômes d'Hermite. Cependant, l'oscillateur de Dirac général soumis à un champ électrique non uniforme a été étudié dans [43]. Il a été constaté, dans cette référence, que dans le cas d'un champ électrique spécialement choisi, l'équation de la valeur propre peut être résolue exactement. Les énergies de l'oscillateur de Dirac dans un champ électrique uniforme ont été présentées de façon explicite dans ce travail. Il a été également démontré qu'un champ électrique suffisamment puissant détruit le confinement.

Dans ce chapitre, le propagateur d'un oscillateur de Dirac bidimensionnel en présence d'un champ électrique uniforme est déterminè en utilisant la technique des intégrales de chemins. Le fait que l'approche nommée globale soit appliqué dans ce qui suit, redirige au préalable notre recherche du propagateur de l'équation de Dirac vers celle du propagateur de sa forme quadratique. Le mouvements interne relatif au spin est représentés par deux oscillateurs fermioniques qui sont décrits par des variables de Grassmann, selon le modèle fermionique de Schwinger. Une fois que l'intégration sur les variables anticommutatives (variables grassmanniennes) est effectuée, le problème devient celui de trouver un propagateur non relativiste exprimé uniquement par des variables bosoniques. Le spectre d'énergie ansi que les fonctions propres du systéme sont également obtenus dans ce chapitre.

2.2 Formalisme

Le propagateur de l'équation de Dirac est la fonction de Green causale $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$, solution de l'équation ci-dessous (on note $\hbar = c = 1$)

$$(\gamma^\mu \left(i\partial_{b\mu} - eA_\mu(\mathbf{x}_b)\right) - m)S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{2.1}$$

où e représente la charge de la particule, m est la masse de la particule, A_μ est le quadrivecteur potentiel et le label c est synonyme de causale. Les matrices-gamma de Dirac (γ-matrices) satisfont

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_4, \qquad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

avec $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)\,,\ \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ le tenseur de spin, $\mathbb{I}_4$ la matrice unitaire 4×4 et $\mu,\nu = 0,1,2,3.$

Le fait que nous travaillons dans un espace de dimension 2+1 nous permet d'exprimer les matrices-gamma de Dirac en fonction des matrices de Pauli de la manière suivante :

$$\gamma^0 = \sigma_3, \qquad \gamma^1 = i\sigma_2, \qquad \gamma^2 = -i\sigma_1, \tag{2.3}$$

Nous représentons $S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ comme étant l'élément de matrice de l'opérateur S^c dans l'espace des coordonnées

$$S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b | S^c | \mathbf{x}_a \rangle, \tag{2.4}$$

où S^c est donné par

$$S^c = -\left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right)^{-1}. \tag{2.5}$$

L'utilisation de (2.5) permet d'écrire

$$S^c = -O_-^{-1} = -O_+\left(O_-O_+\right)^{-1} = -O_+\left(O_+O_-\right)^{-1}, \tag{2.6}$$

tels que O_- et O_+ sont, respectivement, l'opérateur de Dirac et l'opérateur de projection,

$$O_\pm = \gamma^\mu\left(p_\mu - eA_\mu\right) \pm m. \tag{2.7}$$

Ensuite, la représentation globale de la fonction de Green causale $S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ est obtenue on tenant compte de (2.6) et on insérant la relation de complétude $\int |z\rangle\langle z|\, d^3z = 1$ entre les opérateurs O_+ et $(O_-O_+)^{-1}$ de l'équation (2.4) , ce qui donne

$$S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \left(\gamma^\mu\left(i\partial_{b\mu} - eA_\mu\right) + m\right) S^c_g(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a), \tag{2.8}$$

où la nouvelle fonction de Green $S^c_g(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ que nous suggérons de calculer maintenant par la technique des intégrales de chemins est définie comme suit :

$$S^c_g(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b | -\left(O_-O_+\right)^{-1} | \mathbf{x}_a \rangle = \langle \mathbf{x}_b | -\left(O_+O_-\right)^{-1} | \mathbf{x}_a \rangle\,, \tag{2.9}$$

où le label g est synonyme de globale.

L'opérateur de la projection globale O_+ dans l'équation (2.8) élimine les états superflues qui résultent de l'action de l'opérateur $(O_-O_+)^{-1}$.

Cette procédure a été utilisée dans [40] pour la dérivation systématique de la représentation intégrale de chemins du propagateur sans avoir besoin à étendre l'espace à 5 dimensions, et donc, sans l'utilisation de la matrice γ^5. Elle a aussi été utilisée dans [47] et [48] pour obtenir un opérateur de type bosonique dont la forme est quadratique par rapport aux matrices γ. Dans ce travail, nous utilisons cette procédure, pareillement à [6], par ce que on procède dans un espace-temps de dimension impaire là où il n'y en a pas de matrice γ^5.

Il est facile de constater à partir des relations (2.1) et (2.8) que l'élément de matrice S_g^c vérifie l'équation quadratique de Dirac

$$\mathcal{H}S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{2.10}$$

où $\mathcal{H}$ est définit par

$$\mathcal{H} = O_-O_+ = O_+O_-. \tag{2.11}$$

Plus spécifiquement, considérons l'oscillateur de Dirac de dimension 2+1 assujetti à un champ électrique uniforme décrit par le potentiel de composantes

$$A_0 = -Ex, \qquad A_x = 0, \qquad A_y = 0. \tag{2.12}$$

L'oscillateur de Dirac dans la direction x est obtenu par la substitution non-minimale suivante, effectuée au niveau des opérateurs O_- et O_+ qu'on a définis dans (2.7),

$$\hat{p}_x \rightarrow \hat{p}_x - im\omega\widehat{x}\gamma^0, \tag{2.13}$$

$$\hat{p}_y \rightarrow \hat{p}_y. \tag{2.14}$$

Ici, ω est la fréquence de l'oscillateur. Par consideration de la relation (2.7), nous pouvons écrire

$$O_- = \sigma_3\left(\hat{p}_0 + eE\hat{x}\right) - i\sigma_2\hat{p}_x + i\sigma_1\left(\hat{p}_y - m\omega\hat{x}\right) - m, \tag{2.15}$$

$$O_+ = \sigma_3 \left(\hat{p}_0 + eE\hat{x}\right) - i\sigma_2 \hat{p}_x + i\sigma_1 \left(\hat{p}_y - m\omega\hat{x}\right) + m. \tag{2.16}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}{=}O_- O_+ &= \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - \left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)\hat{x}^2 \\ &+ 2m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0 E\hat{x} - m^2 - ieE\sigma_1 + m\omega\sigma_3\end{aligned} \tag{2.17}$$

est l'expression explicite de l'opérateur $\mathcal{H}$ qui va jouer le rôle de l'Hamiltonien de notre système quantique.

2.3 La formulation intégrale de chemins de l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique uniforme

À présent, nous nous concentrons sur quelques définitions, propriétés et notations nécessaires pour la suite de notre développement.

Puisque l'interaction spin-champ est le point culminant de notre étude, nous suivons alors la même procédure utilisée dans [49, 50], ou les matrices de Pauli σ_i sont remplacées avec une paire d'opérateurs fermioniques (u, d) dans le cadre du modèle fermionique de spin de Schwinger, ainsi,

$$\sigma_i \longrightarrow \left(u^+, d^+\right)\sigma_i \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}^+ \sigma_i \boldsymbol{\eta}, \tag{2.18}$$

où la paire (u, d) décrit un oscillateur fermionique bidimensionnelles.

Par définition, les deux états propres de spin $|\uparrow\rangle$ and $|\downarrow\rangle$ sont générés à partir de l'état du vide suite à l'action des opérateurs fermioniques u^+ et d^+ de l'oscillateur selon les relations

$$u^+ \ |0,0\rangle = |\uparrow\rangle \quad \text{et} \quad d^+ \ |0,0\rangle = |\downarrow\rangle\,, \tag{2.19}$$

et où l'action de u et d sur l'état du vide est exprimé par un résultat nul

$$u \ |0,0\rangle = 0 \quad \text{and} \quad d \ |0,0\rangle = 0. \tag{2.20}$$

Les opérateurs fermioniques (u, d) ainsi que leurs adjoints (u^+, d^+) satisfont aux relations d'anticommutations habituelles

$$\left[u,u^{+}\right]_{+}=1,\quad \text{and}\quad \left[d,d^{+}\right]_{+}=1, \tag{2.21}$$

Les autres anticommutateurs sont nulles.

C'est la notation standard $[A,B]_{+}$ que nous adoptons ici

$$[A,B]_{+}=AB+BA. \tag{2.22}$$

Pour bâtir le formalisme intégrale de chemins, nous introduisons à présent le formalisme des états cohérents. Ces états sont définis comme des vecteurs propres des opérateurs u et d d'annihilation selon l'algèbre

$$u\left|\alpha,\beta\right\rangle=\alpha\left|\alpha,\beta\right\rangle=\alpha\left|\eta\right\rangle,\quad d\left|\alpha,\beta\right\rangle=\beta\left|\alpha,\beta\right\rangle=\beta\left|\eta\right\rangle, \tag{2.23}$$

où

$$\eta\equiv\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\quad \eta^{*}=\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{pmatrix},\quad \left|\eta\right\rangle\equiv\left|\alpha,\beta\right\rangle,\quad \left\langle\eta\right|\ \equiv\left\langle\overline{\beta},\overline{\alpha}\right| \tag{2.24}$$

et (α,β) est une paire de variables de Grassmann qui anti-commutent avec les opérateurs fermioniques ainsi qu'avec eux même, à savoir

$$\left\{\begin{array}{l}[\alpha,u]_{+}=[\alpha,u^{+}]_{+}=[\alpha,d]_{+}=[\alpha,d^{+}]_{+}=0\\ {[\beta,u]_{+}}=[\beta,u^{+}]_{+}=[\beta,d]_{+}=[\beta,d^{+}]_{+}=0\end{array}\right| \tag{2.25}$$

et commutent avec les états du vide

$$\left\{\begin{array}{ll}\alpha\left|0,0\right\rangle=\left|0,0\right\rangle\alpha, & \left\langle 0,0\right|\alpha=\ \left\langle 0,0\right|\alpha\\ \beta\left|0,0\right\rangle=\left|0,0\right\rangle\beta, & \left\langle 0,0\right|\beta=\ \left\langle 0,0\right|\beta\end{array}\right|. \tag{2.26}$$

Les définitions précédentes produisent la relation suivante qui stimule que les états sont générés à partir de l'état du vide comme suit :

$$\left|\eta\right\rangle=\left|\alpha,\beta\right\rangle=\exp\left(-\alpha u^{+}-\beta d^{+}\right)\left|0,0\right\rangle. \tag{2.27}$$

Deux importantes relations peuvent être obtenues pour ces états, à savoir : la relation de complétude

$$\int d\eta^* d\eta \exp(-\eta^*\eta) \left|\eta\right\rangle \left\langle\eta\right| = 1, \tag{2.28}$$

et celle de la non-orthogonalité

$$\left\langle\eta|\eta'\right\rangle = e^{\eta^*\eta'}. \tag{2.29}$$

Tenir compte des précédentes propriétés et notations permet d'exprimer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ selon la forme fermionique suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - \left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)\hat{x}^2 + 2m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0E\hat{x} \\ &- m^2 - ieE\eta^+\sigma_1\eta + m\omega\eta^+\sigma_3\eta.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Selon la procédure habituelle de construction des intégrales de chemins, nous définissons le propagateur comme étant un élément de matrice de l'opérateur d'évolution $\mathbf{U}(\lambda)$ entre l'état initial $\mid \mathbf{x}_{a},\eta_a\rangle$ et l'état final $\mid \mathbf{x}_{b},\eta_b\rangle$. Le propagateur peut être représenté par la méthode du temps-propre de Schwinger de la manière suivante :

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \eta_b, \eta_a) = \frac{-i}{2}\int_0^\infty d\lambda \langle \mathbf{x}_b,\eta_b \mid \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\lambda \left(\mathcal{H} + i\varepsilon\right) dt\right) \mid \mathbf{x}_a,\eta_a\rangle. \tag{2.31}$$

Pour écrire la représentation intégrale de chemins du propagateur, nous discrétisons l'intervalle de temps $[0, \lambda]$ en $N+1$ moments intermédiaires de longueur $\epsilon = \frac{1}{N+1}$ chaque et puis nous écrivons $\exp(i\lambda\mathcal{H}) = [\exp(i\lambda\mathcal{H})\varepsilon]^{N+1}$. Ainsi, grâce à la formule de Totter et après avoir introduit, dans chaque moment de temps intermédiaire, les relations de fermetures relatives au spin et celles dans les espaces de coordonnées et des impulsions

$$\int d\eta^* d\eta \exp(-\eta^*\eta) \left|\eta\right\rangle \left\langle\eta\right| = 1, \tag{2.32}$$

$$\int \mid \mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x} \mid d^3\mathbf{x} = 1, \tag{2.33}$$

et

$$\int \mid \mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p} \mid d^3\mathbf{p} = 1, \tag{2.34}$$

nous obtenons ainsi l'expression condensée suivante qui représente la forme intégrale de chemins du propagateur

$$
\begin{aligned}
& S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\eta_b,\eta_a)=-\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda\int DtDp_0\int DxDp_x\int DyDp_y\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta^* \\
& \times\exp\left\{i\int_0^1\left[-p_0\dot{t}+p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+\frac{1}{2}\lambda p_0^2-\frac{1}{2}\lambda p_x^2-\frac{1}{2}\lambda p_y^2\right.\right. \\
& -\frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2-e^2E^2\right)x^2-\frac{\lambda}{2}m^2+2m\omega xp_y+2eEp_0x \\
& \left.\left.-i\frac{1}{2}\lambda eE\eta^*\sigma_1\eta+\frac{1}{2}\lambda m\omega\eta^*\sigma_3\eta+\tfrac{i}{2}\left(\eta^*\dot{\eta}-\dot{\eta}^*\eta\right)\right]d\tau\right\},
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

où $\mathbf{x}=(t,x,y)$ et $\boldsymbol{\eta}$ satisfont les condition au bords suivantes

$$
\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_a,\qquad \mathbf{x}(1)=\mathbf{x}_b,\qquad \boldsymbol{\eta}(0)=\boldsymbol{\eta}_a,\qquad \boldsymbol{\eta}(1)=\boldsymbol{\eta}_b \tag{2.36}
$$

2.4 Calcul Exact de la fonction de Green

Ayant montré comment formuler le problème de l'oscillateur de Dirac à 2+1 dimensions en présence d'un champ électrique uniforme dans le cadre de l'approche intégrale de chemins, nous allons maintenant procéder au calcul de la fonction de Green causale S_g^c dans le cas $m^2\omega^2>e^2E^2$.

Une intégration par rapport aux chemins t et y permet de voir que les impulsions deviennent des constantes de mouvement

$$
p_0\left(\lambda\right)=p_0=const,\;\; p_y\left(\lambda\right)=p_y=const, \tag{2.37}
$$

et le propagateur prend la forme

$$
\begin{aligned}
&S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\eta_b,\eta_a)=-\frac{i}{2}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\Big[-p_0\left(t_b-t_a\right)\\
&+p_y\left(y_b-y_a\right)+\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)\Big]\times\int DxDp_x\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta^*\exp\left\{i\int_0^1\Big[p_x\dot{x}\right.\\
&-\frac{1}{2}\lambda p_x^2-\frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2-e^2E^2\right)x^2+\lambda m\omega xp_y+\lambda eEp_0x-i\frac{1}{2}\lambda eE\eta^*\sigma_1\eta\\
&\left.+\frac{1}{2}\lambda m\omega\eta^*\sigma_3\eta+\tfrac{i}{2}\left(\eta^*\dot{\eta}-\dot{\eta}^*\eta\right)\Big]d\tau\right\},
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

à partir duquel on obtient, suite à l'effectuation de l'intégrale Gaussienne par rapport à p_x et une complémentation du carré, l'expression suivante

$$
\begin{aligned}
&S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\eta_b,\eta_a)=-\frac{i}{2}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\Big[-p_0\left(t_b-t_a\right)\\
&+p_y\left(y_b-y_a\right)+\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)+\frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y+eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2-e^2E^2}\Big]\\
&\times\int Dx\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta^*\exp\left\{i\int_0^1\Big[\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2+\tfrac{i}{2}\left(\eta^*\dot{\eta}-\dot{\eta}^*\eta\right)\right.\\
&-\tfrac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2-e^2E^2\right)\left(x-\frac{m\omega p_y+eEp_0}{m^2\omega^2-e^2E^2}\right)^2\\
&\left.+\frac{1}{2}\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\eta^*\left(\sigma_3\cosh\alpha-i\sigma_1\sinh\alpha\right)\eta\Big]d\tau\right\},
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

où

$$
\cosh\alpha=\frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}},\quad \sinh\alpha=\frac{eE}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}. \tag{2.40}
$$

Pour se débarrasser du paramètre α du propagateur, nous introduisons la transformation unitaire suivante

$$
\left\{\begin{array}{ccc} \eta\longrightarrow\xi & & \eta^*\longrightarrow\xi^* \\ \eta=e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\xi & , & \eta^*=\xi^*e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} \end{array}\right., \tag{2.41}
$$

tout en tenant en compte des relations

$$
\sigma_3\cosh\alpha-i\sinh\alpha\sigma_1=\sigma_3e^{\alpha\sigma_2}=e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\sigma_3e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}. \tag{2.42}
$$

Dans ce cas-ci, le propagateur prend la forme

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \xi_b, \xi_a) &= -\frac{i}{2}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i\Bigg[- p_0\left(t_b - t_a\right) \\
&+ p_y\left(y_b - y_a\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\Bigg] \\
&\times \int Dx\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi^* \exp\Bigg\{ i\int_0^1 \Bigg[\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 + \tfrac{i}{2}\left(\xi^*\dot{\xi} - \dot{\xi}^*\xi\right) \\
&-\frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)\left(x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2 \\
&+\frac{1}{2}\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\,\xi^*\sigma_3\xi\Bigg] d\tau\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Tel que montré dans [49], nous intégrons par rapport aux variables de Grassmann, qui est une intégrale fonctionnelle Gaussienne, pour obtenir le résultat suivant

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= -\frac{i}{2}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i\Bigg[- p_0\left(t_b - t_a\right) \\
&+ p_y\left(y_b - y_a\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\Bigg] \\
& e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2} e^{i\frac{1}{2}\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\sigma_3} e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right),
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

où K^{os} est le propagateur relié au chemins $x(\tau)$ et exprime le mouvement d'une particule soumis à l'oscillateur harmonique de fréquence $\Omega = \lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}$ et de masse $\frac{1}{\lambda}$, qui est

$$
K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) = \int Dx\ \exp i\int_0^1 \left(\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 - \frac{1}{2\lambda}\Omega^2\left(x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2\right) d\tau. \tag{2.45}
$$

L'intégrale par rapport aux chemins $x(\tau)$ est bien connue et égale à

$$
\begin{aligned}
K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) &= \left(\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2i\pi\sin\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)}\right)^{1/2} \exp\Bigg(i\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2} \\
&\times \frac{\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)\cos\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right) - 2\tilde{x}_b\tilde{x}_a}{2\sin\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

où

$$\tilde{x} = x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}. \tag{2.47}$$

Le propagateur K^{os} peut être exprimé par l'utilisation de sa valeur connue, à savoir, sa décomposition spectrale [51], comme suit :

$$K^{os} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}/\pi}}{2^n n!} e^{-i\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)} \right.$$
$$\left. \times H_n\left(\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_a\right)\right], \tag{2.48}$$

où H_n est le polynôme de Hermite.

Insérons maintenant l'identité $\sum_{s=\pm1}\chi_s\chi_s^+ = \mathbb{I}_2$ dans (2.44) tout en tenant compte de l'équation de l'opérateur du spin $\sigma_3\chi_s = s\chi_s$. La fonction de Green causale dans ce cas-ci devient

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0\left(t_b - t_a\right)\right.$$
$$\left. + p_y\left(y_b - y_a\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\tilde{\omega}^2}\right]$$
$$\times \sum_{s=\pm1} e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2} e^{i\frac{1}{2}\lambda m\tilde{\omega}s}\chi_s\chi_s^+ e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}e^{-i\lambda m\tilde{\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right. \tag{2.49}$$
$$\left.\times e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)} H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)\right],$$

où

$$\chi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s \\ 1-s \end{pmatrix}, \; m\tilde{\omega} = \sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2} \tag{2.50}$$

et $\mathbb{I}_2$ est la matrice unitaire 2×2.

Une integration par rapport à λ dans cette étape donne l'expression ci-dessous du propagateur

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = & \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}e^{-ip_0(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)} \\
& \times\sum_{s=\pm1}e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^{+}e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)} \\
& \times\frac{H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)}{\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2}\left[\left(p_0+\frac{ep_yE}{m\omega}\right)^2-E_{n,s}^2\right]},
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

qui admet les pôles

$$
p_0=\pm E_{n,s}-\frac{eEp_y}{m\omega},
\tag{2.52}
$$

où

$$
E_{n,s}=\sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}
\tag{2.53}
$$

Comme dans [14], l'application du théorème des résidus au pôle p_0 permet d'obtenir

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(p_0\right)\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0T}}{p_0^2-E_{n,s}^2}=-i\sum_{\epsilon=\pm1}f\left(\epsilon E_{n,s}\right)\frac{e^{-i\epsilon E_{n,s}(t_b-t_a)}}{2E_{n,s}}\Theta\left(\epsilon\left(t_b-t_a\right)\right),
\tag{2.54}
$$

où $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside. L'utilisation de la relation précédente produit le résultat suivant :

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = i & \sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}e^{-i\xi_{p_y,n}^{\epsilon,s}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}\right. \\
& \times\Theta\left(\epsilon\left(t_b-t_a\right)\right)e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^{+}e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} \\
& \times\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\frac{\tilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)} \\
& \left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{b,p_y,n}^{\epsilon,s}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{a,p_y,n}^{\epsilon,s}\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

et les energies $\mathcal{E}_{p_y,n}^{\epsilon,s}$ de notre système sont alors

$$
\mathcal{E}_{p_y,n}^{\epsilon,s}=\epsilon\sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}-\frac{eE}{m\omega}p_y,
\tag{2.56}
$$

où

$$\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n} = x - \frac{m\omega p_y + eE\xi^{\epsilon,s}_{p_y,n}}{m^2\omega^2 - e^2E^2}, \quad \epsilon = \pm 1 \tag{2.57}$$

Dans le cas particulier $p_y = 0$, ce résultat coïncide avec celui obtenu dans [56].

Cependant, quand $E \to 0$, l'expression des valuers propres ce réduit à celle de l'oscillateur de Dirac [52]. Nous remarquons que la présence du champ électrique supprime la dégénérescence dans la direction y.

Extrayons maintenant les états de l'oscillateur de Dirac en présence de champ électrique uniforme par l'application de l'opérateur de projection globale O_+ sur $S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$. La substitution de (2.55) dans (2.8) donne

$$\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = {} & i\left(\gamma^\mu\left(i\partial_{\mu b} - eA_{\mu b}\right) + m\right) \sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right)\right. \\
& \times e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}\frac{\widetilde{\omega}\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^{n+1}n!\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}} \\
& \times e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+ e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)} \\
& \left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{a,p_y,n}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{2.58}$$

qui peut être simplifié pour obtenir

$$\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = {} & -i\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{s=\pm1}\sum_{\epsilon=\pm1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\left[s\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}\left(x_b, y_b; t_b\right)\left(\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}\left(x_a, y_a; t_a\right)\right)^+\right. \\
& \left.\times\, \sigma_3\Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.59}$$

où les spineurs propres $\Psi^\epsilon_{p_y,n,s}\left(x, y; t\right)$ de notre système s'obtiennent comme suit

$$\begin{aligned}
\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}\left(x, y; t\right) = {} & \mathcal{N}^{\epsilon,s}_n\left[\sigma_3\left(\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n} + eEx\right) - \sigma_2\frac{\partial}{\partial x} + i\sigma_1\left(p_y - m\omega x\right) + m\right] \\
& \times e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n}t+ip_y y} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\tilde{x}^2_{\mathcal{E},p_y}} H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

et $\mathcal{N}^{\epsilon,s}_n$ est le facteur de normalisation.

En tenant compte de (2.60) et on utilisons l'identité

$$e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2} = \cosh(\frac{\alpha}{2}) - \sigma_2 \sinh(\frac{\alpha}{2}), \tag{2.61}$$

nous obtenons les spineurs propres normalisés de notre problème comme suit

$$\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x,y;t) = \mathcal{N}^{\epsilon,s}_n \begin{pmatrix} \psi^{\epsilon,s}_{p_y,n} \\ \varphi^{\epsilon,s}_{p_y,n} \end{pmatrix} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right)^2} e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n}t + ip_y y}, \tag{2.62}$$

où

$$\begin{aligned}\psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x) = {} & \left[\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\epsilon E_{n,s} + sm\right)\left(\frac{1+s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2} - \frac{1-s}{2} i \sinh\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ & \times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right) + \sqrt{m\tilde{\omega}}\Bigg[(1+s)\, n \sinh\frac{\alpha}{2} \\ & - \frac{1-s}{2} i \cosh\frac{\alpha}{2}\Bigg] H_{n-s}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right),\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x) = {} & \left[-\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\epsilon E_{n,s} + sm\right)\left(i\frac{1+s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2} + \frac{1-s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ & \times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right) - \sqrt{m\tilde{\omega}}\Bigg[\frac{1-s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2} \\ & + in\,(1+s)\cosh\frac{\alpha}{2}\Bigg] H_{n-s}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right),\end{aligned} \tag{2.64}$$

et

$$|\mathcal{N}^{\epsilon,s}_n| = \frac{\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}} \left[\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\epsilon E_{n,s} + sm\right)^2 + 2\left(n + \frac{1-s}{2}\right)m\omega\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{2.65}$$

Cependant, lorsque $E \to 0$ et $p_y \to 0$ simultanément, la fonction d'onde normalisée peut être écrite comme

$$\begin{aligned}\Psi^{\epsilon\,+}_{p_y,n}(x,y;t) = {} & \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^n n!}\frac{E_{n,+}+\epsilon m}{2E_{n,+}}} H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right) \\ -i\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{E_{n,+}-\epsilon m}{2E_{n,+}}} H_{n-1}\left(\sqrt{m\omega}x\right) \end{pmatrix} \\ & \times e^{-\frac{m\omega}{2}x^2} e^{-i\epsilon E_{n,+}t}\end{aligned} \tag{2.66}$$

Ce dernier résultat de (2.66) est en accord avec celui obtenu dans [52].

2.5 Equivalence avec l'équation the Dirac

Ayant résolu le problème de l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique uniforme par l'approche intégrale de chemins, nous montrons dans ce qui suit que les spineurs obtenus vérifient l'équation de Dirac.

$$O_{-}\Psi^{\epsilon}_{p_y,n,s}\left(x,y;t\right)=0. \tag{2.67}$$

Nous obtenons le résultat suivant par un calcul direct pour le cas $s=+1$.

$$O_{-}\Psi^{\epsilon\,+}_{p_y,n}\left(x,y;t\right)=\mathcal{N}^{\epsilon\,+}_{n}\begin{pmatrix}\mathcal{P}H_n+\mathcal{Q}H_{n-1}\\ \mathcal{R}H_n+\mathcal{T}H_{n-1}\end{pmatrix}e^{-\frac{m\widetilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}^{\epsilon\,+}_{p_y,n}\right)}e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon\,+}_{p_y,n}t+ip_yy}, \tag{2.68}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{P}=&\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\epsilon E_{n,+}+m\right)\left[\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2}-m\left(\widetilde{\omega}+\omega\right)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{p_y}{m\omega}\right)\right.\\&\left.+\frac{\epsilon E_{n,+}}{m\widetilde{\omega}}\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2}+m\left(\widetilde{\omega}-\omega\right)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}=&2n\sqrt{m\widetilde{\omega}}\left[\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2}+m\left(\widetilde{\omega}-\omega\right)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{p_y}{m\omega}\right)\right.\\&\left.-\frac{\epsilon E_{n,+}}{m\widetilde{\omega}}\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2}-m\left(\widetilde{\omega}+\omega\right)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}=&i\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}\epsilon E_{n,+}+m\right)\left[\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2}+m\left(\widetilde{\omega}-\omega\right)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{p_y}{m\omega}\right)\right.\\&\left.-\frac{\epsilon E_{n,+}}{m\widetilde{\omega}}\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2}-m\left(\omega+\widetilde{\omega}\right)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.71}$$

et

$$\mathcal{T} = 2in\sqrt{m\widetilde{\omega}}\Bigg[\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m\left(\widetilde{\omega}+\omega\right)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{p_y}{m\omega}\right)$$
$$+ \frac{\epsilon E_{n,+}}{m\widetilde{\omega}}\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m\left(\widetilde{\omega}-\omega\right)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg]. \tag{2.72}$$

Tenant compte de (2.40), nous obtenons respectivement

$$eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m\left(\widetilde{\omega}+\omega\right)\sinh\frac{\alpha}{2} = 0, \tag{2.73}$$

et

$$eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m\left(\widetilde{\omega}-\omega\right)\cosh\frac{\alpha}{2} = 0. \tag{2.74}$$

Les identités ci-dessus (2.73) et (2.74) impliquent que chaqun des facteurs définis dans (2.69), (2.70), (2.71) et (2.72) est nuls, ce qui valide (2.67) pour le cas $s = +1$. La validation de notre solution pour le cas $s = -1$ peut être vérifiée par un raisonnement similaire.

2.6 Conclusion

Dans le présent chapitre, en utilisant l'approche des intégrales de chemins, nous avons résolu le problème de l'oscillateur de Dirac à (2+1) dimensions en présence d'un champ électrique uniforme. La fonction de Green est présentée dans le cadre de la projection dite globale et le mouvement interne relatif au spin est exprimé par deux oscillateurs fermioniques dans l'espace des états cohérents via des variables de Grassmann. Nous avons calculé exactement la fonction de Green causale, les énergies et les spineurs propres exprimées en termes de polynômes d'Hermite. Le résultat obtenu est validé.

Chapitre 3

L'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique dans le cadre du formalisme super-symétrique des intégrales de chemins

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous calculons le propagateur de l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique par l'utilisation du formalisme super-symétrique des intégrales de chemins élaborée par Fradkin et Gitman [4] en introduisant des sources Grassmaniennes gauches. Comme dans le précédent chapitre, nous utilisons la méthode de la projection globale [40] qui facilite la résolution de notre problème. Le spectre d'énergie ainsi que les spineurs propres sont obtenus. En outre, par l'utilisation de différentes propriétés du propagateur, nous arrivons à le présenter de manière permettant de déduire les spineurs propres directement sous forme normalisée. La limite non-relativiste et la densité du courant sont aussi étudiées. Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la Section 2, nous montrons comment utiliser la méthode de projection globale pour traiter l'oscillateur de Dirac dans un champ électrique à $(2 + 1)$ dimensions ; dans la Section 3, nous donnons une formulation de l'intégrale de chemins super-symétrique du problème en question ; dans les sections 4 et 5, nous calculons la fonction de Green causale et extrayons les spineurs propres normalisés ainsi que les énergies. Dans la section 6, nous étudions la limite non relativiste et obtenons les fonctions propres et les énergies dans ce cas. Dans la section 7, nous déterminons la densité de courant.

3.2 Projection globale

Le propagateur de l'équation de Dirac est la fonction de Green causale $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ solution de l'équation ci-dessous (on note $\hbar = c= 1$)

$$(\gamma^\mu (i\partial_{b\mu} - eA_\mu(\mathbf{x}_b)) - m)S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{3.1}$$

où e décrit la charge de la particule et le label c est synonyme de causale. Les lettres en gras sont utilisées pour écrire les vecteurs de Lorentz(ex., $\mathbf{x} \equiv (t, x, y)$). Les matrices gamma de Dirac (γ-matrices) obéissent à l'algèbre

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_4, \qquad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

où $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)\,,\ \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ le tenseur de spin, $\mathbb{I}_4$ la matrice unitaire 4×4 et $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Le fait que nous travaillons dans un espace de dimension (2+1), où il y a deux représentations non équivalentes pour les matrices γ, nous permet de les écrire à l'aide des matrice de Pauli comme suit :

$$\gamma^0 = \sigma_3, \qquad \gamma^1 = i\sigma_2, \qquad \gamma^2 = -i\sigma_1\varsigma, \qquad \varsigma = \pm 1. \tag{3.3}$$

Nous considérons $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ comme étant l'élément de matrice dans l'espace des coordonnées de l'opérateur S^c et on l'écrit, par consequence, comme suit

$$S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b | S^c | \mathbf{x}_a \rangle, \tag{3.4}$$

où l'opérateur S^c est

$$S^c = -\left(\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m\right)^{-1}. \tag{3.5}$$

Avec l'aide de (3.5) nous obtenons

$$S^c = -O_-^{-1} = -O_+ \left(O_- O_+\right)^{-1} = -O_+ \left(O_+ O_-\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

où O_- and O_+ représentent, repectivement, l'opérateur de Dirac et l'opérateur de projection

$$O_{\pm} = \gamma^{\mu} \left(p_{\mu} - eA_{\mu}\right) \pm m.$$

Ensuite, la représentation globale de la fonction de Green causale $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ est obtenue en tenons compte de (3.6) et on insérons la relation de complétude $\int |z\rangle \langle z| \, d^3z = 1$ entre les opérateurs O_+ et $\left(O_- O_+\right)^{-1}$ de l'équation (3.4) , ce qui donne

$$S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \left(\gamma^{\mu} \left(i\partial_{b\mu} - eA_{\mu}\right) + m\right) S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a), \tag{3.7}$$

où la nouvelle fonction de Green $S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ que nous suggérons de calculer maintenant par la technique des intégrales de chemins est définie comme suit

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b| - \left(O_- O_+\right)^{-1} |\mathbf{x}_a\rangle = \langle \mathbf{x}_b| - \left(O_+ O_-\right)^{-1} |\mathbf{x}_a\rangle, \tag{3.8}$$

et le label g est synonyme de globale.

L'opérateur de la projection globale O_+ dans l'équation (3.8) élimine les états superflues qui résultent de l'action de l'opérateur $\left(O_- O_+\right)^{-1}$.

Cette procédure a été utilisée dans [40] pour la dérivation systématique de la représentation intégrale de chemins du propagateur sans avoir besoin à étendre l'espace à 5 dimensions, et donc, sans l'utilisation de la matrice γ^5. Elle a aussi été utilisée dans [47] et [48] pour obtenir un opérateur de type bosonique dont la forme est quadratique par rapport aux matrices γ. Dans ce travail, nous utilisons cette procédure, comme c'est le cas dans [6], par ce que on procède dans un espace-temps de dimension impaire, là où il n'y en a pas de matrice γ^5.

Il est facile de constater à partir des relations (3.1) et (3.8) que l'élément de matrice S_g^c vérifie l'équation quadratique de Dirac

$$\mathcal{H} S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{3.9}$$

où $\mathcal{H}$ est définit par

$$\mathcal{H} = O_- O_+ = O_+ O_- . \tag{3.10}$$

Plus spécifiquement, considérons l'oscillateur de Dirac de dimension 2+1 assujetti à un champ électrique uniforme décrit par le potentiel de composantes

$$A_0 = -Ex, \qquad A_x = 0, \qquad A_y = 0. \tag{3.11}$$

L'oscillateur de Dirac dans la direction x est obtenu par la substitution non-minimale suivante, effectuée au niveau des opérateurs O_- et O_+ qu'on a définis dans (3.7),

$$\hat{p}_x \rightarrow \hat{p}_x - im\omega\widehat{x}\gamma^0, \tag{3.12}$$

$$\hat{p}_y \rightarrow \hat{p}_y. \tag{3.13}$$

où ω est la fréquence de l'oscillateur.

L'utilisation de (3.7) permet d'écrie

$$O_- = \gamma^0 \left(\hat{p}_0 + eE\hat{x}\right) - \gamma^1 \hat{p}_x - \gamma^2 \varsigma \left(\varsigma \hat{p}_y - m\omega\hat{x}\right) - m, \tag{3.14}$$

$$O_+ = \gamma^0 \left(\hat{p}_0 + eE\hat{x}\right) - \gamma^1 \hat{p}_x - \gamma^2 \varsigma \left(\varsigma \hat{p}_y - m\omega\hat{x}\right) + m. \tag{3.15}$$

Tenant compte de (3.3) et des propriétés des matrices de Pauli, nous obtenons

$$\gamma^0 = i\zeta\gamma^1\gamma^2, \qquad \gamma^1 = i\zeta\gamma^0\gamma^2, \qquad \gamma^2 = -i\zeta\gamma^0\gamma^1. \tag{3.16}$$

Par substitution de (3.18) dans (3.17), l'Hamiltonien $\mathcal{H}$ du systéme prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \;\; = \;\; & O_- O_+ = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - \left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)\hat{x}^2 \\ & + 2\varsigma m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0 E\hat{x} - m^2 - \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu, \end{aligned} \tag{3.17}$$

où F est un tenseur antisymétrique dont les composante sont :

$$F_{01} = -F_{10} = eE, \quad F_{12} = -F_{21} = -m\omega, \tag{3.18}$$

et tous les autres éléments sont nuls. Dans ce cas, F est considéré comme une matrice dont les lignes sont repérées pat le premier indice contravariant et les colonnes sont repérées par le deuxième indice covariant.

3.3 La formulation intégrale de chemins super-symétrique de l'oscillateur de Dirac à 2+1 dimensions en présence d'un champ éléctrique uniforme

Il est possible d'utiliser la représentation via le temps propre de Schwinger pour exprimer la fonction de Green causale $S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ par l'intégrale

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{-i}{2}\int_0^\infty d\lambda \exp\left(\langle \mathbf{x}_b \mid \exp\left(\frac{i\lambda}{2}\mathcal{H}\right) \mid \mathbf{x}_a\rangle\right). \tag{3.19}$$

Comme d'habitude, pour aller à la représentation intégrale de chemins, nous discrétisons l'intervalle de temps à $N+1$ moments intermédiaires de durée $\epsilon = \frac{1}{N+1}$ chaque et nous écrivons $\exp(\frac{i\lambda}{2}\mathcal{H}) = \left[\exp(\frac{i\lambda}{2}\mathcal{H})\varepsilon\right]^{N+1}$. Ainsi, grâce à la formule de Totter et après avoir introduit N fois la relation de fermeture $\int \mid \mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x} \mid d^3\mathbf{x} = 1$ entre les opérateurs $\exp(\frac{i\lambda}{2}\mathcal{H}\varepsilon)$ et $N+1$ intégrale additionnels $\int d\lambda_k \delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) = 1$ par rapport à λ, l'expression de $S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ prend la forme intégrale de chemins suivante

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= \frac{-i}{2}\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_0^\infty d\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} d\lambda_k \prod_{k=1}^{N} d\mathbf{x}_k \\ \times \prod_{k=1}^{N+1}\langle \mathbf{x}_k &\mid \exp(\frac{i\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon) \mid \mathbf{x}_{k-1}\rangle \delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

où $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_b$ et λ est renommé λ_0.

Par expantion des éléments de matrices de $\exp(\frac{i\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon)$ au premier ordre de ε, nous obtenons

$$\langle \mathbf{x}_k|\exp(\frac{i\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon)\,|\mathbf{x}_{k-1}\rangle \approx \langle \mathbf{x}_k|\,1 + \frac{i\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon\,|\mathbf{x}_{k-1}\rangle \tag{3.21}$$

L'insertion $(N+1)$ fois de l'identité $\int \mid \mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p} \mid d^3\mathbf{p} = 1$ permet d'écrire la fonction de Green comme suit

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= \frac{-i}{2}\lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\int_0^\infty d\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} d\lambda_k \prod_{k=1}^{N} d\mathbf{x}_k \prod_{k=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{N+1} \delta\left(\lambda_k-\lambda_{k-1}\right) \exp i\left(\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon}+\frac{\lambda_k}{2}\mathcal{H}\left(\overline{\mathbf{x}}_k,\mathbf{p}_k\right)\right)\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Avec l'utilisation de la représentation intégrale suivante de $\delta\left(\lambda_k-\lambda_{k-1}\right)$ à droite de (3.22)

$$\delta\left(\lambda_k-\lambda_{k-1}\right)=\frac{1}{2\pi}\int d\pi_k \exp i\pi_k(\lambda_k-\lambda_{k-1}) \tag{3.23}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= \frac{-i}{2}\lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\int_0^\infty d\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} d\lambda_k \prod_{k=1}^{N} d\mathbf{x}_k \prod_{k=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3} \prod_{k=1}^{N+1}\frac{d\pi_k}{(2\pi)} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{N+1} \exp\left[i\left(\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon}+\pi_k\frac{(\lambda_k-\lambda_{k-1})}{\varepsilon}+\frac{\lambda_k}{2}\mathcal{H}\left(\overline{\mathbf{x}}_k,\mathbf{p}_k\right)\right)\varepsilon\right]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Comme dans [4], par la suite, nous attribions formellement l'indice k aux matrices γ de (3.24) et, en même temps, nous attribions le "temps" τ_k à tous les termes selon leur indice k, $\tau_k=k\Delta\tau$, tel que $\tau\in[0,1]$.

Il devient possible à cette étape de calcul d'introduir l'opérateur chronologique $\mathcal{T}$ et d'assembler tous les multiplicateurs de (3.24) dans un seul exposant pour obtenir l'expression suivante de la fonction de Green

$$\begin{aligned} & S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = -\frac{i}{2}\mathcal{T}\int_0^\infty d\lambda_0 \int D\lambda \int DtDp_0 \int DxDp_x \int DyDp_y \int D\pi \\ & \times \exp\left\{i\int_0^1 \left[-p_0\dot{t}+p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+\frac{1}{2}\lambda p_0^2-\frac{1}{2}\lambda p_x^2-\frac{1}{2}\lambda p_y^2\right.\right. \\ & -\frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2-e^2E^2\right)x^2-\frac{\lambda}{2}m^2+\lambda\varsigma m\omega x p_y+\lambda eEp_0x \\ & \left.\left.-\frac{i\lambda}{4}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu+\pi\dot{\lambda}\right]d\tau\right\}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\mathbf{x}=(t,x,y)$ et λ satisfont les conditions de bords

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_a,\quad \mathbf{x}(1)=\mathbf{x}_b,\quad \lambda(0)=\lambda_0. \tag{3.26}$$

La dérivation par rapport à τ dans (3.25) est désignée par un point en haut et l'opérateur chronologique $\mathcal{T}$ agit sur les matrices γ, qui sont formellement supposées dépendre du paramètre temps τ, et permet de les traiter comme des variables de Grassmann.

L'utilisation de la technique des sources permet de transformer (3.25) comme suit

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda_0 \int D\lambda \int DtDp_0 \int DxDp_x \int DyDp_y \int D\pi \\
&\times \exp\left\{ i\int_0^1 \left[-p_0\dot{t} + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + \frac{1}{2}\lambda p_0^2 - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda p_y^2 \right.\right. \\
&-\frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2 - \frac{\lambda}{2}m^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda eEp_0x \\
&\left.\left. -\frac{i\lambda}{4}F_{\mu\nu}\frac{\delta_l}{\delta\rho_\mu}\frac{\delta_l}{\delta\rho_\nu} + \pi\dot{\lambda}\right] d\tau\right\} \mathcal{T}\exp\int_0^1 \rho_n\gamma^n d\tau\Big|_{\rho_n=0},
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

où $\rho_n(\tau), n = 0, 1, 2$, sont trois sources à gauche de Grassmann et $\frac{\delta_l}{\delta\rho_\mu}$ désigne la dérivation à gauche. Elles anti-commutent, par définition, avec les matrices gamma.

À présent, nous exprimons $\mathcal{T}\exp\int_0^1 \rho_n\gamma^n d\tau$ avec la formulation intégrale de chemins par rapport aux trajectoires grassmannienne via la formule fonctionnelle [4, 40] :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}\exp\int_0^1 \rho_n\gamma^n d\tau &= \exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta}\mathcal{D}\Psi \\
&\times\exp\left\{\int_0^1\left[\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu - 2i\rho_\mu\Psi^\mu\right]d\tau + \Psi_\mu(1)\,\Psi^\mu(0)\right\}\Big|_{\theta=0},
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

où la mesure $\mathcal{D}\Psi$ est donné par

$$
\mathcal{D}\Psi = D\Psi\left[\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta}\exp\left\{\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu d\tau\right\}D\Psi\right]^{-1}
\tag{3.29}
$$

et θ^μ sont des variables gauches de Grassmann qui anti-commutent avec les matrices γ et $\Psi^\mu(\tau)$ sont des trajectoires grassmannienne d'intégration qui anti-commutent avec les matrice γ et qui obéissent aux conditions de bords

$$
\Psi(0) + \Psi(1) = \theta,
\tag{3.30}
$$

indiquées au dessous du signe d'intégration. Par la substitution de (3.28) dans (3.27) et en tenant compte des relations (3.29) et (3.30) nous obtenons la représentation intégrale de chemins Hamiltonienne pour la fonction de Green en question :

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= -\frac{i}{2}\exp\left(i\gamma^\mu \frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\int_0^\infty d\lambda_0 \int D\lambda \int DtDp_0 \int DxDp_x \\
&\times \int DyDp_y \int D\pi \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \exp\left\{ i\int_0^1 \left[-p_0\dot{t} + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + \frac{1}{2}\lambda p_0^2 \right.\right. \\
&-\frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda p_y^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2 - \frac{\lambda}{2}m^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y \\
&\left.\left. +\lambda eEp_0 x - i\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu + i\lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu + \pi\dot{\lambda}\right] d\tau + \Psi_\mu(1)\Psi^\mu(0)\right\}\Big|_{\theta=0}, \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

3.4 Calcul exact de la fonction de Green et du spectre d'énergie

Ayant montré comment formuler le problème de l'oscillateur de Dirac à 2+1 dimensions en présence d'un champ électrique avec la formulation intégrale de chemins super-symétrique, nous allons mainenant calculer la fonction de Green S_g^c quand $m^2\omega^2 > e^2E^2$.

En effectuant l'intégration par rapport aux chemins π, λ, t et y, nous pouvons voir que les moments deviennent des constantes de mouvement

$$
p_0(\lambda) = p_0 = const,\; p_y(\lambda) = p_y = const, \qquad (3.32)
$$

et le propagateur prend la forme

$$
S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} G_E(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\lambda)\mathcal{F}(\lambda), \qquad (3.33)
$$

où $\mathcal{F}(\lambda)$ et $G_E(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\lambda)$ représentent, respectivement, les parties bosonique et fermionique :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lambda) &= \exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta}\mathcal{D}\Psi \\
&\quad \exp\left\{\int_0^1 \left[\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu - \lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu\right] d\tau + \Psi_\mu(1)\Psi^\mu(0)\right\}\Big|_{\theta=0}, \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_{a,}\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i \left[-p_0 \left(t_b - t_a\right) + p_y \left(y_b - y_a\right)\right. \\ &\left. +\frac{1}{2}\lambda \left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right)\right] \times \int DxDp_x \exp\left\{i \int_0^1 \left[p_x \dot{x} - \frac{1}{2}\lambda p_x^2\right.\right. \\ &\left.\left. -\frac{1}{2}\lambda \left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right) x^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda e E p_0 x\right] d\tau\right\}. \qquad (3.35) \end{aligned}$$

Dans le but de calculer $\mathcal{F}(\lambda)$, nous commencons par effectuer le changement de variables de Ψ à ξ, où

$$\Psi^\mu = \frac{1}{2}\xi^\mu + \frac{1}{2}\theta^\mu, \qquad (3.36)$$

et nous prenons en considération (3.30) pour obtenir les nouvelles conditions aux bords

$$\xi^\mu(0) + \xi^\mu(1) = 0. \qquad (3.37)$$

Tenir compte de (3.36) et (3.37) produit les relations

$$\Psi_\mu\left(1\right)\Psi^\mu\left(0\right) = \frac{1}{2}\theta^\mu\left(0\right)\xi_\mu\left(0\right), \qquad (3.38)$$

$$\int_0^1 \left(\Psi_\mu \dot{\Psi}^\mu\right) d\tau = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\xi_\mu \dot{\xi}^\mu\right) d\tau - \frac{1}{2}\theta_\mu\left(0\right)\xi^\mu\left(0\right), \qquad (3.39)$$

et

$$\int_0^1 \left[-4\lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu\right] d\tau = -\lambda F_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu - \int_0^1 \lambda F_{\mu\nu}\left(\xi^\mu\xi^\nu + 2\theta^\mu\xi^\nu\right) d\tau. \qquad (3.40)$$

Grâce aux relations précédentes (3.38), (3.39) et (3.40), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda) &= \exp\left(i\gamma^\mu \frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}F_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right) \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\xi \exp \\ &\left.\left\{\int_0^1 \left[\frac{1}{4}\xi_\mu \dot{\xi}^\mu - \frac{\lambda}{4}F_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu - \frac{\lambda}{2}F_{\mu\nu}\theta^\mu\xi^\nu\right] d\tau\right\}\right|_{\theta=0}. \qquad (3.41) \end{aligned}$$

Nous pouvons trouver [5, 6]

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sqrt{\det(\cosh\frac{\lambda F}{2})} \exp\left(i\gamma^\mu \frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right) \left.\left[1 - \frac{\lambda}{2}B_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right]\right|_{\theta=0}, \qquad (3.42)$$

où

$$B = \frac{1}{\lambda} \tanh \frac{\lambda F}{2}, \tag{3.43}$$

tel que B correspont à la matrice $B^{\mu}{}_{\nu}$.

Dans le but d'évaluer $\mathcal{F}(\lambda)$, nous commencons par trouver $\det(\cosh \frac{\lambda F}{2})$ et B.

Puisque $\frac{\lambda F_{\mu\nu}}{2}$ est antisymétrique, il a donc les valeurs propres $0, \varphi$ and $-\varphi$ qui vérifient

$$\varphi^2 = \frac{tr\ \left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2}{2}, \tag{3.44}$$

et sont carré $\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2$ est proportionnel à l'opérateur de projection P appartenant à un sous-espace de deux dimensions comme suit :

$$\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2 = \varphi^2 P, \quad P^2 = P, \quad trP = 2,\ P\frac{\lambda F}{2} = \frac{\lambda F}{2}P = \frac{\lambda F}{2} \tag{3.45}$$

Selon (3.18) nous avons

$$\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4} \begin{pmatrix} e^2E^2 & 0 & eEm\omega \\ 0 & e^2E^2 - m^2\omega^2 & 0 \\ -eEm\omega & 0 & -m^2\omega^2 \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

ce qui nous permet de trouver

$$\varphi = \frac{i\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2} \tag{3.47}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{e^2E^2}{e^2E^2 - m^2\omega^2} & 0 & \frac{eEm\omega}{e^2E^2 - m^2\omega^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-eEm\omega}{e^2E^2 - m^2\omega^2} & 0 & \frac{-m^2\omega^2}{e^2E^2 - m^2\omega^2} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Nous savon que pour une fonction paire h nous avons

$$h(\frac{\lambda F}{2}) = h(0)(1 - P) + h(\varphi)P, \tag{3.49}$$

donc,

$$\cosh \frac{\lambda F}{2} = 1 - \left(1 - \cos(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2})\right)P. \tag{3.50}$$

Par substitution de (3.48) dans (3.50), nous trouvons

$$\cosh\frac{\lambda F}{2}=\begin{pmatrix} 1+\frac{Ke^2E^2}{m^2\omega^2-e^2E^2} & 0 & \frac{KeEm\omega}{m^2\omega^2-e^2E^2} \\ 0 & 1-K & 0 \\ \frac{-KeEm\omega}{m^2\omega^2-e^2E^2} & 0 & 1-\frac{Km^2\omega^2}{m^2\omega^2-e^2E^2} \end{pmatrix}, \tag{3.51}$$

où

$$K=\left(1-\cos(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2})\right). \tag{3.52}$$

Par l'utilisation de (3.51), nous obtenons après un long mais simple calcul

$$\sqrt{\det\left(\cosh\frac{\lambda F}{2}\right)}=1-K=\cos(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}). \tag{3.53}$$

Il est connu pour une fonction impaire g que

$$g(\frac{\lambda F}{2})=\frac{\frac{\lambda F}{2}}{\varphi}g\left(\varphi\right). \tag{3.54}$$

L'utilisation de (3.54) transforme (3.43) à la relation équivalente

$$B=\frac{F}{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}\tan\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}. \tag{3.55}$$

Dans le but de trouver l'expression explicite de la matrice $\mathcal{F}(\lambda)$, nous utilisons l'identité

$$\exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)f\left(\theta\right)\Big|_{\theta=0}=f\left(\frac{\partial_l}{\partial\zeta}\right)\exp\left(i\zeta_\mu\gamma^\mu\right)\Big|_{\zeta=0} \tag{3.56}$$

et

$$\exp\left(i\zeta_\mu\gamma^\mu\right)=1+i\zeta_\mu\gamma^\mu+\frac{1}{2}\zeta_\mu\zeta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu+i\zeta_0\zeta_1\zeta_2\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \tag{3.57}$$

où ζ_μ sont des variables gauches. Nous otenons dans ce cas-ci

$$\begin{aligned} &\exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\left[1-\frac{\lambda}{2}B_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right]|_{\theta=0} \\ =\ & 1-\frac{\tan\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}\left[eE\gamma^1\gamma^0-m\omega\gamma^2\gamma^1\right]. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Par la substitution de (3.53) et (3.58) dans (3.42) nous obtenons

$$\mathcal{F}(\lambda) = \cos(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2}) - \frac{\sin\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\left[eE\gamma^1\gamma^0 - m\omega\gamma^2\gamma^1\right]. \tag{3.59}$$

L'utilisation de (3.18) permet d'écrire (3.59) sous la forme

$$\mathcal{F}(\lambda) = \cos(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2}) + \frac{i\sin\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\left[eE\gamma^2 + m\omega\gamma^0\right], \tag{3.60}$$

que nous pouvons facilement réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda) &= \sum_{s=\pm1}\frac{1}{2}\left[1 + s\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}} + \frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\right)\right] \\ &\quad \times \exp\frac{i\lambda s\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2}.\end{aligned} \tag{3.61}$$

En performant le changement suivant

$$\cosh\alpha = \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}},\ \ \sinh\alpha = \frac{eE}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}, \tag{3.62}$$

nous pouvons prouver après un cartain calcul que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[1 + s\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}} + \frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\right)\right] \\ = &\begin{pmatrix} \frac{1+s\cosh(\alpha)}{2} & \frac{-is\sinh\alpha}{2} \\ \frac{-is\sinh\alpha}{2} & \frac{1-s\cosh(\alpha)}{2} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.63}$$

Tenant compte des propriétés des fonctions paraboliques et des matrices σ_i de Pauli suivantes

$$\exp(x\sigma_i) = \cosh x + \sigma_i \sinh x, \tag{3.64}$$

nous obtenons les identités suivantes

$$\begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_1, \tag{3.65}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \chi_1^+ \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right), \tag{3.66}$$

$$-\begin{pmatrix} i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = -\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_{-1}, \tag{3.67}$$

et

$$\begin{pmatrix} -i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = -\chi_{-1}^+ \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right). \tag{3.68}$$

L'utilisation des relations (3.65) à (3.68) permet de mettre (3.63) sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[1+s\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}+\frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}\right)\right] \\ = \quad & \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^\dagger\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right). \end{aligned} \tag{3.69}$$

La substitution de (3.69) dans (3.61) mène au résultat

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda) \quad = \quad & \sum_{s=\pm1}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^\dagger\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \\ & \times\exp\frac{i\lambda s\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2} \end{aligned} \tag{3.70}$$

où $\chi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s & 1-s \end{pmatrix}^T$.

Ayant réussi à effectuer l'intégration par rapport aux variables de Grassmann, effectuons maintenant l'intégration par rapport aux trajectoires paires (bosoniques).

L'équation (3.35) devient ce qui suit en effectuant l'intégrale Gaussienne par rapport à p_x et en complétant le carré.

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_{a,}\lambda) \quad = \quad & \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0\left(t_b-t_a\right)+p_y\left(y_b-y_a\right)\right. \\ & \left.+\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)+\frac{1}{2}\lambda\frac{\left(\varsigma m\omega p_y+eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2-e^2E^2}\right] \\ & \times K^{os}\left(x_a,x_b;\lambda\right), \end{aligned} \tag{3.71}$$

où K^{os} est le propagateur relié au chemin $x(\tau)$ et exprime la mouvement de la particule soumise à l'oscillateur harmonique de fréquence $\Omega = \lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}$ et de masse $\frac{1}{\lambda}$, qui est

$$\begin{aligned} K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) &= \int Dx \ \exp i \int_0^1 \left(\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\lambda}\Omega^2\left(x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2\right) d\tau. \end{aligned} \tag{3.72}$$

L'intégrale par rapport à $x(\tau)$ est bien connue [57], elle est égale à

$$\begin{aligned} K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) &= \left(\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2i\pi\sin\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)}\right)^{1/2} \exp\left(i\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right. \\ &\times \left.\frac{\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)\cos\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right) - 2\tilde{x}_b\tilde{x}_a}{2\sin\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)}\right), \end{aligned} \tag{3.73}$$

où

$$\tilde{x} = x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}. \tag{3.74}$$

Le propagateur K^{os} peut être écrit en utilisant son expression, à savoir, sa décomposition spectral [51], comme suit

$$\begin{aligned} K^{os} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}/\pi}}{2^n n!} e^{-i\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)}\right. \\ &\left.\times H_n\left(\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_a\right)\right], \end{aligned} \tag{3.75}$$

où H_n est le polynôme de Hermite.

L'équation (3.71) devient dans ce cas

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_{a,}\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0\left(t_b - t_a\right) + p_y\left(y_b - y_a\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(\varsigma m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right] \\ &\times \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}e^{-i\lambda m\tilde{\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2^n n!}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)}\right. \\ &\left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)\right], \end{aligned} \tag{3.76}$$

où

$$\tilde{\omega} = \omega\sqrt{1 - \frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}. \tag{3.77}$$

Par la substitution de (3.70) et (3.76) dans (3.33), notre propagateur prend la forme

$$\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b,\eta_b,\mathbf{x}_a,\eta_a) &= -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0\left(t_b-t_a\right)\right.\\
&\left.+p_y\left(y_b-y_a\right)+\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)+\frac{1}{2}\lambda\frac{\left(\varsigma m\omega p_y+eEp_0\right)^2}{m^2\tilde{\omega}^2}\right]\\
&\times\sum_{s=\pm1}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^\dagger\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\times\exp\frac{i\lambda sm\tilde{\omega}}{2}\\
&\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}e^{-i\lambda m\tilde{\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2^n n!}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)}\right.\\
&\left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Une intégration par rapport à λ dans cette étape donne l'expression

$$\begin{aligned}
S_g^c\left(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}e^{-ip_0(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}\\
&\times\sum_{s=\pm1}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^\dagger\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\\
&\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)}}{2^n n!}\right.\\
&\left.\times\frac{H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)}{\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2}\left[\left(p_0+\frac{e\varsigma p_yE}{m\omega}\right)^2-E_{n,s}^2\right]}\right],
\end{aligned} \tag{3.79}$$

qui a les pôles

$$p_0 = \pm E_{n,s} - \frac{e\varsigma E}{m\omega}p_y = \pm\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}\sqrt{m^2+2m\widetilde{\omega}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)} - \frac{e\varsigma E}{m\omega}p_y, \tag{3.80}$$

où

$$E_{n,s} = \pm\sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)} \tag{3.81}$$

Comme dans [12], l'application du théorème des résidus au pôle p_0 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(p_0\right) \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 T}}{p_0^2 - E_{n,s}^2} \\
= & -i \sum_{\epsilon=\pm 1} f\left(\epsilon E_{n,s}\right) \frac{e^{-i\epsilon E_{n,s}\left(t_b - t_a\right)}}{2E_{n,s}} \Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.82}$$

où $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside. Ceci mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
S_g^c\left(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a\right) = & \; i \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} e^{-i\zeta_{p_y,n,s}^{\epsilon}\left(t_b - t_a\right) + ip_y\left(y_b - y_a\right)} \right. \\
& \times \Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \chi_s \chi_s^{\dagger} \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \\
& \times \frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\tilde{\omega}}{2^n n! 2\omega \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)}} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)} \\
& \left. \times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{b,p_y,n}^{\epsilon,s}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{a,p_y,n}^{\epsilon,s}\right) \right\},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

où

$$\zeta_{p_y,n}^{\epsilon,s} = \epsilon \sqrt{1 - \frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}} \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)} - \frac{e\varsigma E}{m\omega} p_y, \tag{3.84}$$

$$\tilde{x}_{p_y,n}^{\epsilon,s} = x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eE\zeta_{p_y,n}^{\epsilon,s}}{m^2\omega^2 - e^2E^2} \quad \text{et} \quad \epsilon = \pm 1 \tag{3.85}$$

Dans la section suivante, nous donnons la solution exacte de notre problème par l'utilisation de différentes propriétés de du propagateur pour calculer les spineurs propres normalisés et les énergies correspondantes.

3.5 Les spineurs propres et le spectre d'énergie

Maintenant nous extrayons les états normalisées de notre problème par l'application de l'opérateur de la projection globale O_+ sur $S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$. La substitution de (3.83) dans (3.7) s'écrit

$$S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)=i\left[\sigma_3\left(i\frac{\partial}{\partial t_b}+eEx_b\right)-\sigma_2\frac{\partial}{\partial x_b}+i\sigma_1\left(\frac{\partial}{i\partial y_b}-m\omega x_b\right)+m\right]$$
$$\sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\Theta\left(\epsilon\left(t_b-t_a\right)\right)\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\right.$$
$$\times e^{-i\zeta^{\epsilon,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}\frac{\widetilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}$$
$$\times e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)}$$
$$\left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{b,p_y,n}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{a,p_y,n}\right).\right\} \tag{3.86}$$

Nous pouvons facilement réécrire (3.86) sans le paramètre ϵ de la façon suivante

$$S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)=i\left[\sigma_3\left(i\frac{\partial}{\partial t_b}+eEx_b\right)-\sigma_2\frac{\partial}{\partial x_b}+i\sigma_1\left(\frac{\partial}{i\partial y_b}-m\omega x_b\right)+m\right]$$
$$\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\frac{\widetilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}$$
$$\times\left\{\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)e^{-i\zeta^{s,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}\right.$$
$$\times e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)^2+\left(\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)}$$
$$\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)$$
$$+\Theta\left(-s\left(t_b-t_a\right)\right)e^{-i\zeta^{-s,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}$$
$$\times e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)^2+\left(\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)}$$
$$\left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)\right\} \tag{3.87}$$

Les identités facilement vérifiables

$$\begin{gathered}\sigma_1\chi_s=\chi_{-s},\quad \sigma_2\chi_s=is\chi_{-s},\quad \sigma_3\chi_s=s\chi_s,\\ \sigma_1e^{A\sigma_2}=-e^{A\sigma_2}\sigma_1,\quad \sigma_3e^{A\sigma_2}=-e^{A\sigma_2}\sigma_3,\end{gathered} \tag{3.88}$$

aussi bien que les fameuses relations de récurrences des polynômes de Hermite énumérées ci-dessous, vont être prisent en compte dans les suivants étapes pour déterminer la fonction causale de Green.

$$\begin{array}{c} H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + \frac{dH_n(t)}{dt} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \\ \frac{dH_n(t)}{dt} = 2nH_{n-1}(t), \qquad n \in \mathbb{N}^*. \end{array} \tag{3.89}$$

Après un long, mais simple, calcul l'action du projecteur global O^+ produit le résultat ci-dessous

$$\begin{aligned} S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = i \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!} & \frac{\tilde{\omega} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)}{2\omega\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)}} \\ & \Big\{ \Theta\left(s\left(t_b - t_a\right)\right) e^{-i\zeta^{s,s}_{p_y,n}(t_b - t_a) + ip_y(y_b - y_a)} \\ & \times \Big[\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}} E_{n,s} + m\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right) \chi_s \chi_s^+ \\ & + \left(i\frac{(s-1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}} H_{n+1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)\right. \\ & \left. - i(1+s)n\sqrt{m\tilde{\omega}} H_{n-1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)\right) \chi_{-s}\chi_s^+ \Big] \\ & \times e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)^2 + \left(\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)} \\ & + \Theta\left(-s\left(t_b - t_a\right)\right) e^{-i\zeta^{-s,s}_{p_y,n}(t_b - t_a) + ip_y(y_b - y_a)} \\ & \times \Big[\left(\frac{-\omega}{\widetilde{\omega}} E_{n,s} + m\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right) \chi_s \chi_s^+ \\ & + \left(i\frac{(s-1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}} H_{n+1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)\right. \\ & \left. - i(1+s)n\sqrt{m\tilde{\omega}} H_{n-1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)\right) \chi_{-s}\chi_s^+ \Big] \\ & \times e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)^2 + \left(\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)} \Big\} \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right). \end{aligned} \tag{3.90}$$

Comme dans [11], pour unifier l'expression des énergies dans S^c, nous performons les transformations suivantes au niveau des termes de (3.90) qui sont multipliés par $\Theta\left(-s\left(t_b - t_a\right)\right)$

$$\begin{aligned} s &\to s' = -s, \\ n &\to n' = n - s. \end{aligned} \tag{3.91}$$

On peut facilement vérifier que les relations précédentes transforment respectivement $E_{n,s}$ et $\zeta^{-s,s}_{p_y,n}$ à $E_{n',s'}$ et $\zeta^{s',s'}_{p_y,n'}$. Par la suite, nous remplaçons les indices muets s' par s et n' par n pour obtenir la suivante expression de la fonction de Green causale

$$
\begin{aligned}
S^{c}(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = {} & i\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\\
& \times e^{-i\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)}e^{-\frac{1}{2}\left(X_b^2+X_a^2\right)}\\
& \frac{\widetilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\\
& \left\{\left[\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)H_n\left(X_b\right)H_n\left(X_a\right)\right]\chi_s\chi_s^{+}\right.\\
& +i\left[\frac{(s-1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n+1}\left(X_b\right)H_n\left(X_a\right)\right.\\
& \left.-\ (1+s)n\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-1}\left(X_b\right)H_n\left(X_a\right)\right]\chi_{-s}\chi_s^{+}\\
& +\ \tfrac{2^s n!(n-s+1)}{(n-s+1)!}\left[\left(\frac{-\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)H_{n-s}\left(X_b\right)H_{n-s}\left(X_a\right)\right]\chi_{-s}\chi_{-s}^{+}\\
& -i\tfrac{2^s n!(n-s+1)}{(n-s+1)!}\left[\frac{(s+1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-s+1}\left(X_b\right)H_{n-s}\left(X_a\right)\right.\\
& \left.\left.+(1-s)\left(n-s\right)\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-s-1}\left(X_b\right)H_{n-s}\left(X_a\right)\right]\chi_s\chi_{-s}^{+}\right\}\\
& \times\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right),
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

où

$$
\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}=\zeta^{s,s}_{p_y,n},\ X_b=\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\text{ and }X_a=\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}. \tag{3.93}
$$

Pour aller plus loin dans notre approche, nous utilisons la relation suivante, obtenue de (3.81) par un calcul direct

$$
\sqrt{m\tilde{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{(2n+1-s)}}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)}. \tag{3.94}
$$

Tenant compte de (3.94), nous pouvons réécrire la fonction de Green causale comme suit

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = i \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigg\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \ & \Big\{ \Theta\left(s\left(t_b - t_a\right)\right) e^{-i\mathcal{E}^s_{p_y,n}(t_b - t_a)} e^{+ip_y(y_b - y_a)} \\
& \times e^{-\frac{1}{2}\left(X_b^2 + X_a^2\right)\frac{\widetilde{\omega}^2}{\omega^2}} \left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\right] \\
& \times \left[\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}} E_{n,s} + m}{2^{n+1} n! E_{n,s}}} H_n\left(X_b\right)\chi_s - i\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}} E_{n,s} - m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)! E_{n,s}}} H_{n-s}\left(X_b\right)\chi_{-s}\right] \\
& \times \left[\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}} E_{n,s} + m}{2^{n+1} n! E_{n,s}}} H_n\left(X_a\right)\chi_s^+ - i\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}} E_{n,s} - m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)! E_{n,s}}} H_{n-s}\left(X_a\right)\chi_{-s}^+\right] \\
& \times \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right).
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

Finalement, en considérant (3.88) nous obtenons de (3.95) l'expression suivante pour la fonction de Green causale, là où il y a deux types de propagation, l'une avec une énergie positive $\mathcal{E}^+_{p_y,n}$ et l'autre avec une énergie négative $\mathcal{E}^-_{p_y,n}$:

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) &= S^-(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)\left[\Theta\left(t_b - t_a\right)\right] - S^+(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)\left[\Theta\left(-\left(t_b - t_a\right)\right)\right] \\
&= i\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \left[\Phi^+_{p_y,n}\left(x_b, y_b; t_b\right)\left(\Phi^+_{p_y,n}\left(x_a, y_a; t_a\right)\right)^\dagger\right. \\
&\times e^{-i\mathcal{E}^+_{p_y,n}(t_b - t_a)}\Theta\left(t_b - t_a\right) - \Phi^-_{p_y,n}\left(x_b, y_b; t_b\right)\left(\Phi^-_{p_y,n}\left(x_a, y_a; t_a\right)\right)^\dagger \\
&\times \left. e^{-i\mathcal{E}^-_{p_y,n}(t_b - t_a)}\Theta\left(-\left(t_b - t_a\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

qui peut être aussi écrite sous la forme compacte

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = i\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} & \left[s\Phi^s_{p_y,n}\left(x_b, y_b; t_b\right)\left(\Phi^s_{p_y,n}\left(x_a, y_a; t_a\right)\right)^\dagger\right. \\
& \left. \times \sigma_3 e^{-i\mathcal{E}^s_{p_y,n}(t_b - t_a)}\Theta\left(s\left(t_b - t_a\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

où les spineurs normalisés de notre système sont définies par

$$\begin{aligned}\Psi^s_{p_y,n}(x,y;t) &= e^{-i\mathcal{E}^s_{p_y,n}t}\Phi^s_{p_y,n}(x,y;t)\\ &= u^s_{p_y,n}(x,y;t)\,\chi_s + v^s_{p_y,n}(x,y;t)\,\chi_{-s},\end{aligned} \tag{3.98}$$

avec

$$\begin{aligned}u^s_{p_y,n}(x,y;t) = {} & e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(x-\frac{m\omega p_y+eE\mathcal{E}^s_{p_y,n}}{m^2\omega^2-e^2E^2}\right)^2} e^{-i\mathcal{E}^s_{p_y,n}t}e^{+ip_y y}\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}\\ & \times\left\{\left(\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!E_{n,s}}}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)H_n(X)\right.\\ & \left.+\left(s\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}(n-s+1)!E_{n,s}}}\sinh\frac{\alpha}{2}\right)H_{n-s}(X)\right\}\end{aligned} \tag{3.99}$$

et

$$\begin{aligned}v^s_{p_y,n}(x,y;t) = {} & e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(x-\frac{m\omega p_y+eE\mathcal{E}^s_{p_y,n}}{m^2\omega^2-e^2E^2}\right)^2} e^{-i\mathcal{E}^s_{p_y,n}t}e^{+ip_y y}\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}\\ & \left\{-\left(is\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!E_{n,s}}}\sinh\frac{\alpha}{2}\right)H_n(X)\right.\\ & \left.-\left(i\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}(n-s+1)!E_{n,s}}}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)H_{n-s}(X)\right\}.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Tenir compte de (3.96) et se servir de (3.93) nous permet d'obtenir l'expression suivante des valeurs propres de l'énerige

$$\mathcal{E}^s_{p_y,n}{=}s\sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y. \tag{3.101}$$

Contrairement à l'oscillateur de Dirac non-relativiste dans un champ électrique où les niveaux d'énergie sont discrets est équidistant, le cas relativiste a aussi un spectre d'énergie discret mais les niveaux d'énergies sont non équidistant.

Nous remarquons de (3.101) que la présence du champ électrique supprime la dégénérescence selon la direction y et augmente les distances entre les différents niveaux d'énergie. Cependant, dans le cas $E \rightarrow 0$, (3.101) ce réduit à l'expression connue des valeurs propres de l'énergie pour l'oscillateur de Dirac [44]. La situation $eE = m\omega$ mène à la relation $\mathcal{E}^{s}_{p_y,n} = -\varsigma p_y$, qui est un résultat physiquement inacceptable car l'énergie totale est toujours supérieure à l'impulsion sauf dans le cas $m = 0$. Donc, les énergies dans ce dernier cas ne peuvent pas être obtenues de façon triviale à partir de (3.101).

Par l'utilisation de (3.98) à (3.99), nous pouvons aussi trouver la forme explicite suivante des spineurs propres du systéme

$$\Psi^{s}_{p_y,n}\left(x,y;t\right) = \begin{pmatrix} \psi^{s}_{p_y,n} \\ \varphi^{s}_{p_y,n} \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}X^2} e^{-i\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}t} e^{+ip_y y} \sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}} \sqrt{\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}, \tag{3.102}$$

où

$$\psi^{s}_{p_y,n} = \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[\frac{1+s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2} + i\frac{1-s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}\right]H_n\left(X\right)$$
$$+\sqrt{\frac{\left(n-s+1\right)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)!\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[\frac{1+s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2} - i\frac{1-s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right]H_{n-s}\left(X\right) \tag{3.103}$$

et

$$\varphi^{s}_{p_y,n} = \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[\frac{1-s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2} - i\frac{1+s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}\right]H_n\left(X\right)$$
$$+\sqrt{\frac{\left(n-s+1\right)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)!\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[-\frac{1-s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2} - i\frac{1+s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right]H_{n-s}\left(X\right). \tag{3.104}$$

De l'équation (3.102), nous voyons que si $p_y = 0$ à $t = 0$, $\Psi^{s}_{p_y,n}\left(x,y;t\right)$ sont des états liés. Cela signifie que si le potentiel de l'oscillateur de Dirac est suffisamment fort comparativement au champ électrique, le confinement aura lieu.

Cependant, si $p = 0$ et $E = 0$ en même temps, nous obtenons de (3.102), par un calcul direct, le résultat suivant

$$\begin{aligned}\Psi^{+}_{p_y,\,n}(x,y;t) &= e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}e^{-iE_{n,+}t}\\ &\times\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}(E_{n,+}+m)}{2^{n+1}n!E_{n,+}}}H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right)\\ -i\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}(E_{n,+}-m)}{2^{n}(n-1)!E_{n,+}}}H_{n-1}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.105}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi^{-}_{p_y,\,n}(x,y;t) &= e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}e^{iE_{n,-}t}\\ &\times\begin{pmatrix}-i\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}(E_{n,-}-m)}{2^{n+2}(n+1)!E_{n,-}}}H_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\\ \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}(E_{n,-}+m)}{2^{n+1}n!E_{n,-}}}H_{n}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.106}$$

L'application de la transformation (3.91) sur (3.106) nous permet d'obtenir le résultat suivant

$$\begin{aligned}\Psi^{-}_{p_y,\,n}(x,y;t) &= e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}e^{iE_{n+1,+}t}\\ &\times\begin{pmatrix}-i\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}(E_{n+1,+}-m)}{2^{n+2}(n+1)!E_{n,-}}}H_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\\ \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}(E_{n+1,+}+m)}{2^{n+1}n!E_{n+1,+}}}H_{n}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.107}$$

Les résultats (3.105) et (3.107) sont en accord avec [52].

L'état fondamental de notre système peut être obtenu de (3.102) quand $s = 1$ et $n = 0$. Il est facile d'obtenir, par un calcul direct, dans ce cas spécial, l'expression ci-dessous de la fonction d'onde normalisée représentant l'état fondamental du système.

$$\begin{aligned}\Psi^{+}_{p_y,\,0}(x,y;t) &= e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}^{+,+}_{p_y,0}\right)^2}e^{-i\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}m-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y\right)t+ip_y y}\\ &\times\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}\sqrt{\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}\begin{pmatrix}\cosh\frac{\alpha}{2}\\ -i\sinh\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.108}$$

Cela mène à l'état fondamental d'énergie suivant

$$\mathcal{E}^{+}_{p_y,0} = \sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}m - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y.\tag{3.109}$$

3.6 La limite non-relativiste

Nous pouvons déduire la limite non-relativiste en suivant le processus habituel en posant $\mathcal{E}^s_{p_y,n} = m + \mathcal{E}^{\mathbb{NR}}$ et considérant $\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} \ll m$, où $\mathbb{NR}$ représente la limite non-relativiste.

Il est simple de vérifier que le développement de Taylor de (3.101) au deuxième ordre peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^s_{p_y,n} \approx\; & sm + s\omega\left(n + \frac{1-s}{2}\right) - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y \\ & - \frac{s}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2 + \frac{s\omega^2}{2m}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.110}$$

où le premier terme correspond à l'énergie au repos de la particule, le deuxième, le troisième et le quatrième représentent l'oscillateur harmonique $\mathbb{NR}$ en présence d'un champ électrique uniforme et le dernier terme est une correction relativiste qu'on omettra par la suite.

On peut avoir aussi

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s} + m}{E_{n,s}} \to 2, \tag{3.111}$$

et

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s} - m}{E_{n,s}} \to 0. \tag{3.112}$$

Tenant compte des limites précédentes, nous pouvone écrire $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ comme suit

$$\begin{aligned}S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) \simeq\; & i\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(X_b^2+X_a^2\right)}e^{+ip_y(y_b-y_a)} \\ & \times\Bigg\{\Theta\left((t_b-t_a)\right)e^{-i\left(m+\omega n-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y-\frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)(t_b-t_a)} \\ & \times\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_b\right)\chi_1\right]\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_a\right)\chi_1^+\right] \\ & +\Theta\left(-\left(t_b-t_a\right)\right)e^{i\left(m+\omega(n+1)+\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y-\frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)(t_b-t_a)} \\ & \times\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_b\right)\chi_{-1}\right]\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_a\right)\chi_{-1}^+\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.113}$$

ce qui nous permet d'obtenir les fonction propres habituelles $\Psi^s_{p_y,n}\left(x,t\right)$ du cas non-relativiste comme suit

$$\Psi^{s}_{p_y,n}(x,t) \rightarrow e^{-i\left(\omega n-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y-\frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)t}e^{+ip_y y} \times \begin{pmatrix} \psi^{\mathbb{NR}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.114}$$

avec la fonctions non-relativiste

$$\psi^{\mathbb{NR}} = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2}\left(x-\frac{\varsigma p_y}{m\omega}-\frac{eE}{m\omega^2}\right)^2} \times H_n\left(\sqrt{m\omega}\left(x-\frac{\varsigma p_y}{m\omega}-\frac{eE}{m\omega^2}\right)\right) \tag{3.115}$$

et l'énergie non-relativiste correspondante

$$\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} = \omega n - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2 \tag{3.116}$$

ou aussi sous la forme

$$\Psi^{s}_{p_y,n}(x,t) \rightarrow e^{i\left(\omega(n+1)+\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y-\frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)t}e^{+ip_y y} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{\mathbb{NR}} \end{pmatrix}, \tag{3.117}$$

avec

$$\psi^{\mathbb{NR}} = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2}\left(x-\frac{\varsigma p_y}{m\omega}+\frac{eE}{m\omega^2}\right)^2} \times H_n\left(\sqrt{m\omega}\left(x-\frac{\varsigma p_y}{m\omega}+\frac{eE}{m\omega^2}\right)\right) \tag{3.118}$$

et

$$\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} = \omega(n+1) + \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2, \tag{3.119}$$

Pour le cas $E = 0$ nous obtenons le résultat connu

$$\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} = \frac{\left(\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}\right)^2 - m^2}{2m}. \tag{3.120}$$

3.7 Densité du courant

Examinons maintenant la densité du courant $\overrightarrow{J}$ que nous pouvons écrire selon nos résultats précédentes sous la forme suivante

$$\overrightarrow{J}_{n}^{s} = i\left\langle \sigma_3 \overrightarrow{\sigma} \right\rangle . \tag{3.121}$$

Par la la substitution de (3.98) dans (3.121) et l'utilisation de (3.88), nous trouvons que la densité du courant s'annule dans la direction y

$$\begin{aligned} J_{y,n}^{s} = & \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(u_{p_y,n}^{s}(x,y;t)^{*} \chi_s^{+} + v_{p_y,n}^{s}(x,y;t)^{*} \chi_{-s}^{+} \right) \sigma_1 \\ & \times \left(u_{p_y,n}^{s}(x,y;t)\, \chi_s + v_{p_y,n}^{s}(x,y;t)\, \chi_{-s} \right) = 0\ . \end{aligned} \tag{3.122}$$

Cependant, la densité de courant dans la direction x est obtenue comme suit

$$\begin{aligned} J_{x,n}^{s} = & -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(u_{p_y,n}^{s}(x,y;t)^{*} \chi_s^{+} + v_{p_y,n}^{s}(x,y;t)^{*} \chi_{-s}^{+} \right) \sigma_2 \\ & \times \left(u_{p_y,n}^{s}(x,y;t)\, \chi_s + v_{p_y,n}^{s}(x,y;t)\, \chi_{-s} \right) \\ & = 2is \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(u_{p_y,n}^{s}(x,y;t)^{*}\, v_{p_y,n}^{s}(x,y;t) \right) . \end{aligned} \tag{3.123}$$

L'intégrale dans (3.123) peut être évaluée à l'aide de la propriété d'orthogonalité des fonctions d'Hermite normalisées

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t)\, H_n(t)\, dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}, \tag{3.124}$$

où δ_{mn} est le delta Kronecker.

L'utilisation de (3.99) et (3.100), après un simple calcul, permet d'obtenir l'expression suivante de la densité de courant

$$J_{x,n}^{s} = 2is \left(-is \frac{eE}{2m\omega} \right) = \frac{eE}{m\omega}, \tag{3.125}$$

qui est indépendante des valeurs de s et n.

3.8 Conclusion

Dans le présent chapitre, en utilisant l'approche supersymétrique covariante de l'intégrale de chemins, nous avons résolu le problème relativiste de l'oscillateur de Dirac à $(2+1)$ dimensions en présence d'un champ électrique uniforme, et ce en utilisant la méthode de Fradkin-Gitman qui repose sur l'utilisation des sources Grassmaniennes. La fonction de Green est calculée ainsi que les spineurs et les énergies propres du systéme. Par la suite, les fonctions d'ondes dans la limite non-relativiste sont déduites et la densité du courant obtenue.

Chapitre 4

L'oscillateur de Dirac super-symétrique assujetti à un champ électrique dans l'absence de confinement

4.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre le cas $e^2E^2 > m^2\omega^2$, là où il n'y a pas de confinement. Nous calculons le propagateur du système et déduisons les spineurs propres, grâce à certain propriétés de symétrie de ce dernier, exprimés à l'aide des fonctions cylindriques paraboliques. Nous abordons aussi le taux de production des paires dans le vide que nous calculons exactement.

4.2 Calcul exact de la fonction de Green

Ayant déjà formulé, dans le chapitre précédent, notre problème par le formalisme super-symétrique des intégrales de chemins, nous allons maintenant calculer la fonction de Green S_g^c dans le cas $e^2E^2 > m^2\omega^2$.

En effectuant les intégrales par rapport à π, λ, t et y de l'expression (3.31), nous trouvons que les moments sont des constantes de mouvement

$$p_0(\lambda) = p_0 = const,\ \ p_y(\lambda) = p_y = const, \tag{4.1}$$

et que le propagateur se représente par l'expression

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} G_E(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_{a,}\lambda)\mathcal{F}(\lambda), \tag{4.2}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda) \quad = \quad & \exp\left(i\gamma^\mu \frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta} \mathcal{D}\Psi \\ & \exp\left\{\int_0^1 \left[\Psi_\mu \dot{\Psi}^\mu - \lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu\right] d\tau + \Psi_\mu(1)\,\Psi^\mu(0)\right\}\Bigg|_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

et

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_{a,}\lambda) \quad = \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i\left[-p_0(t_b - t_a) + p_y(y_b - y_a)\right. \\ & \left. +\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right)\right] \times \int DxDp_x \exp\left\{i\int_0^1 \left[p_x\dot{x} - \frac{1}{2}\lambda p_x^2\right.\right. \\ & \left.\left. -\frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda e E p_0 x\right] d\tau\right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

qui représente, respectivement, les parties fermionique et bosonique du système.

La premiére étape à efectuer pour calculer $\mathcal{F}(\lambda)$, consiste au changement de variables

$$\Psi^\mu = \frac{1}{2}\xi^\mu + \frac{1}{2}\theta^\mu, \tag{4.5}$$

et d'utiliser ensuite (3.30) qui permet d'obtenir la nouvelle condion au bord

$$\xi(0) + \xi(1) = 0. \tag{4.6}$$

Les deux identités précédentes donnent les trois relations suivantes

$$\Psi_\mu(1)\,\Psi^\mu(0) = \frac{1}{2}\theta^\mu(0)\,\xi_\mu(0), \tag{4.7}$$

$$\int_0^1 \left(\Psi_\mu \dot{\Psi}^\mu\right) d\tau = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\xi_\mu \dot{\xi}^\mu\right) d\tau - \frac{1}{2}\theta_\mu\left(0\right)\xi^\mu\left(0\right), \tag{4.8}$$

et

$$\int_0^1 \left[-4\lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu\right] d\tau = -\lambda F_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu - \int_0^1 \lambda F_{\mu\nu}\left(\xi^\mu\xi^\nu + 2\theta^\mu\xi^\nu\right) d\tau. \tag{4.9}$$

Nous obtenons grâce aux identités (4.7), (4.8) et (4.9) que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda) \quad &= \quad \exp\left(i\gamma^\mu \frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{4}F_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right)\int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta}\mathcal{D}\psi\exp \\ &\left\{\int_0^1\left[\frac{1}{4}\xi_\mu\dot{\xi}^\mu - \frac{\lambda}{4}F_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu - \frac{\lambda}{2}F_{\mu\nu}\theta^\mu\xi^\nu\right]d\tau\right\}\Bigg|_{\theta=0}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous pouvons mettre $\mathcal{F}(\lambda)$ sous la forme [5, 6]

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sqrt{\det(\cosh\frac{\lambda F}{2})}\exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\left[1 - \frac{\lambda}{2}B_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right]\Bigg|_{\theta=0}, \tag{4.11}$$

où

$$B = \frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\lambda F}{2}. \tag{4.12}$$

Nous calculons maintenant $\det(\cosh\frac{\lambda F}{2})$ et B pour pouvoir trouver $\mathcal{F}(\lambda)$ après.

Le fait que $\frac{\lambda F_{\mu\nu}}{2}$ est anti-symmetrique permet de conclure qu'il a les valeurs propres $0, \varphi$ et $-\varphi$, tel que

$$\varphi^2 = \frac{tr\ \left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2}{2}, \tag{4.13}$$

et que son carré $\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2$ est proportionnel au projecteur P dans un sous-espace à deux dimensions comme suit :

$$\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2 = \varphi^2 P, \quad P^2 = P, \quad trP = 2,\ P\frac{\lambda F}{2} = \frac{\lambda F}{2}P = \frac{\lambda F}{2}. \tag{4.14}$$

Selon (3.18) on a

$$\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4}\begin{pmatrix} e^2E^2 & 0 & eEm\omega \\ 0 & e^2E^2 - m^2\omega^2 & 0 \\ -eEm\omega & 0 & -m^2\omega^2 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

ce qui nous permet de trouver

$$\varphi = \frac{\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2} = \frac{-\lambda m\varpi}{2} \tag{4.16}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{e^2E^2}{e^2E^2-m^2\omega^2} & 0 & \frac{eEm\omega}{e^2E^2-m^2\omega^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-eEm\omega}{e^2E^2-m^2\omega^2} & 0 & \frac{-m^2\omega^2}{e^2E^2-m^2\omega^2} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Pour une fonction paire h

$$h(\frac{\lambda F}{2}) = h(0)(1-P) + h(\varphi)P, \tag{4.18}$$

donc,

$$\cosh\frac{\lambda F}{2} = 1 - \left(1 - \cosh(\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2})\right)P. \tag{4.19}$$

Par la substitution de (4.17) dans (4.19), nous trouvons

$$\cosh\frac{\lambda F}{2} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Ke^2E^2}{m^2\omega^2-e^2E^2} & 0 & \frac{KeEm\omega}{m^2\omega^2-e^2E^2} \\ 0 & 1-K & 0 \\ \frac{-KeEm\omega}{m^2\omega^2-e^2E^2} & 0 & 1 - \frac{Km^2\omega^2}{m^2\omega^2-e^2E^2} \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

où

$$K = \left(1 - \cosh(\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2})\right). \tag{4.21}$$

Par l'utilisation de(4.20), nous obtenons après un long, mais simple calucul

$$\sqrt{\det\left(\cosh\frac{\lambda F}{2}\right)} = 1 - K = \cosh(\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2}). \tag{4.22}$$

Nous savons que pour une fonction impaire g

$$g(\frac{\lambda F}{2}) = \frac{\frac{\lambda F}{2}}{\varphi}g(\varphi). \tag{4.23}$$

L'utilisation de (4.23) transforme (4.12) à l'identité équivalente

$$B=\frac{F}{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\tanh\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2}. \tag{4.24}$$

Nous utilisons les formules suivantes pour déterminer la matrice $\mathcal{F}(\lambda)$

$$\exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)f\left(\theta\right)\Big|_{\theta=0}=f\left(\frac{\partial_l}{\partial\zeta}\right)\exp\left(i\zeta_\mu\gamma^\mu\right)\Big|_{\zeta=0} \tag{4.25}$$

et

$$\exp\left(i\zeta_\mu\gamma^\mu\right)=1+i\zeta_\mu\gamma^\mu+\frac{1}{2}\zeta_\mu\zeta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu+i\zeta_0\zeta_1\zeta_2\gamma^0\gamma^1\gamma^2, \tag{4.26}$$

où ζ_μ sont des variables gauches. Nous obtenons dans ce cas

$$\begin{aligned}&\exp\left(i\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\left[1-\frac{\lambda}{2}B_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right]|_{\theta=0}\\ =\;&1-\frac{\tanh\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2}}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\left[eE\gamma^1\gamma^0-m\omega\gamma^2\gamma^1\right].\end{aligned} \tag{4.27}$$

Par substitution de (4.24) et (4.27) dans (4.11) nous obtenons

$$\mathcal{F}(\lambda)=\cosh(\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2})-\frac{\sin\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2}}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\left[eE\gamma^1\gamma^0-m\omega\gamma^2\gamma^1\right]. \tag{4.28}$$

L'utilisation de (3.16) nous permet d'écrire (4.28) sous la forme

$$\mathcal{F}(\lambda)=\cosh(\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2})+\frac{i\sinh\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2}}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\left[eE\gamma^2+m\omega\gamma^0\right], \tag{4.29}$$

que nous pouvons facilement réécrire comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda)\;=\;&\sum_{s=\pm1}\frac{1}{2}\left[1-is\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}+\frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\right)\right]\\ &\times\exp\frac{-\lambda s\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Avec l'utilisation du changement suivant

$$\cosh\alpha=\frac{-im\omega}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}},\ \ \sinh\alpha=\frac{-ieE}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}, \tag{4.31}$$

nous prouvons prouver après un certain calcul que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[1-is\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}+\frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\right)\right]\\ =&\left(\begin{array}{cc}\frac{1+s\cosh\alpha}{2} & \frac{-is\sinh\alpha}{2}\\ \frac{-is\sinh\alpha}{2} & \frac{1-s\cosh\alpha}{2}\end{array}\right).\end{aligned} \tag{4.32}$$

Tenant compte des propriétés des fonctions hyperboliques et que

$$\exp\left(x\sigma_i\right)=\cosh x+\sigma_i\sinh x, \tag{4.33}$$

nous obtenons les identités suivantes

$$\left(\begin{array}{c}\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ -i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right)=\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_1, \tag{4.34}$$

$$\left(\begin{array}{cc}\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right)=\chi_1^{+}\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right), \tag{4.35}$$

$$-\left(\begin{array}{c}i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right)=-\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_{-1}, \tag{4.36}$$

$$\left(\begin{array}{cc}-i\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right)=-\chi_{-1}^{+}\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right). \tag{4.37}$$

L'utilisation des relations (4.33) à (4.37) permet de réécrire (4.32) comme suit :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[1-is\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}+\frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}\right)\right]\\ =&\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^{\dagger}\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right).\end{aligned} \tag{4.38}$$

La substitution de (4.38) dans (4.30) mène au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda) &= \sum_{s=\pm 1} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \chi_s \chi_s^\dagger \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \\ &\quad \times \exp \frac{-\lambda s\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2} \end{aligned} \tag{4.39}$$

où $\chi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s & 1-s \end{pmatrix}^T$.

Ayant réussi à effectuer l'intégration par rapport aux variables de Grassmann, examinons maintenant l'intégration selon les variables bosoniques.

L'équation (4.4) prend la forme suivante après l'intégration Gaussienne par rapport à p_x et la complémentation du carré

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_{a,}\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i \left[-p_0\left(t_b - t_a\right) + p_y\left(y_b - y_a\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda \frac{\left(\varsigma m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right] \\ &\quad \times K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right), \end{aligned} \tag{4.40}$$

où K^{os} est le propagateur relié au chemin $x(\tau)$ et exprime le mouvement d'une particule soumise au oscillation harmonique de fréquence $\Omega = i\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}$ et de masse $\frac{1}{\lambda}$, qui est

$$\begin{aligned} K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) &= \int Dx \ \exp i \int_0^1 \left(\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\lambda}\Omega^2\left(x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2\right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.41}$$

L'intégration par rapport au chemin $x(\tau)$ est bien connu et égale à

$$\begin{aligned} K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) &= = \left(\frac{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2i\pi \sinh\left(\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}\right)}\right)^{1/2} \exp\left(i\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}\right. \\ &\quad \left. \times \frac{\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)\cosh\left(\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}\right) - 2\tilde{x}_b\tilde{x}_a}{2\sinh\left(\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}\right)}\right), \end{aligned} \tag{4.42}$$

où

$$\tilde{x} = x + \frac{m\omega p_y + eEp_0}{e^2E^2 - m^2\omega^2}. \tag{4.43}$$

Nous pouvons réécrire (4.42) sous la forme suivante :

$$K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) = \sqrt{\frac{m\varpi}{\pi}} \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\xi^2}} \exp\left[\frac{1}{4}\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}(\theta^2+\phi^2) + i\theta\phi\frac{\xi}{1+\xi^2}\right], \tag{4.44}$$

où

$$\xi = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{\lambda m\varpi}, \quad \theta = \sqrt{-i}z_b, \quad \phi = \sqrt{-i}z_a, \quad m\varpi = \sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2} \tag{4.45}$$

et

$$z_b = \sqrt{2m\varpi}\tilde{x}_b, \qquad z_a = \sqrt{2m\varpi}\tilde{x}_a \tag{4.46}$$

L'utilisation de l'identité suivante impliquant les fonctions cylindriques paraboliques [53]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \exp\left[\frac{1}{4}\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}(\theta^2+\phi^2) + i\theta\phi\frac{\xi}{1+\xi^2}\right] \\ = &\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\xi^{-(\nu+1)}}{\sin\left(-\pi\nu\right)} \sum_{\epsilon=\pm1} D_\nu\left(\epsilon\theta\right) D_{-\nu-1}\left(i\epsilon\phi\right) d\nu, \end{aligned} \tag{4.47}$$

donne

$$\begin{aligned} K^{os}\left(x_a, x_b; \lambda\right) &= \frac{\sqrt{2\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\xi^{-(\nu+\frac{1}{2})}}{\sin\left(-\pi\nu\right)} \\ &\times \sum_{\epsilon=\pm1} D_\nu\left(\epsilon e^{-i\frac{\pi}{4}} z_b\right) D_{-\nu-1}\left(\epsilon e^{i\frac{\pi}{4}} z_a\right) d\nu. \end{aligned} \tag{4.48}$$

L'équation (4.40) devient dans ce cas

$$\begin{aligned} G_E(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_{a,}\lambda) &= \frac{\sqrt{2m\varpi}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i\left[-p_0\left(t_b - t_a\right) + p_y\left(y_b - y_a\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) - \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\varpi^2}\right] \\ &\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\xi^{-(\nu+\frac{1}{2})}}{\sin\left(-\pi\nu\right)} \sum_{\epsilon=\pm1} D_\nu\left(\epsilon e^{-i\frac{\pi}{4}} z_b\right) D_{-\nu-1}\left(\epsilon e^{i\frac{\pi}{4}} z_a\right) d\nu \end{aligned} \tag{4.49}$$

Par la substitution de (4.39) et (4.49) dans (4.2) nous trouvons que

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = &-\frac{\sqrt{2m\varpi}}{8\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0\left(t_b-t_a\right)\right.\\
&\left. p_y\left(y_b-y_a\right)+\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)-\frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y+eEp_0\right)^2}{m^2\varpi^2}\right]\\
&\times\sum_{s=\pm 1}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]^\dagger\sigma_3 s\times\exp\frac{-\lambda s m\varpi}{2}\\
&\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\xi^{-(\nu+\frac{1}{2})}}{\sin\left(-\pi\nu\right)}\sum_{\epsilon=\pm 1}D_\nu\left(\epsilon e^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{-\nu-1}\left(\epsilon e^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)d\nu. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Grâce à l'identité

$$
\sum_{s=\pm 1}f_s\sum_{\epsilon=\pm 1}g_\epsilon=\sum_{s=\pm 1}f_s\left(g_s+g_{-s}\right), \qquad (4.51)
$$

nous pouvons écrire S_g^c comme suit :

$$
\begin{aligned}
S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = &-\frac{\sqrt{2m\varpi}}{8\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0\left(t_b-t_a\right)\right.\\
&\left. p_y\left(y_b-y_a\right)+\frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)-\frac{1}{2}\lambda\frac{\left(m\omega p_y+eEp_0\right)^2}{m^2\varpi^2}\right]\\
&\times\sum_{s=\pm 1}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]^\dagger\sigma_3 s\times\exp\frac{-\lambda s m\varpi}{2}\\
&\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\xi^{-(\nu+\frac{1}{2})}}{\sin\left(-\pi\nu\right)}\left[D_\nu\left(se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{-\nu-1}\left(ise^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right.\\
&\left.+D_\nu\left(-se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{-\nu-1}\left(-ise^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right]d\nu. \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

L'intégration de (4.52) par rapport à λ produit le facteur

$$
\left[(\nu+\frac{1}{2})m\varpi-\frac{1}{2}i\left(p_0^2-p_y^2-m^2\right)+\frac{1}{2}i\frac{\left(m\omega p_y+eEp_0\right)^2}{m^2\varpi^2}+\frac{sm\varpi}{2}\right]^{-1}, \qquad (4.53)
$$

qui nous permet à ce stade d'effectuer l'intégration par rapport à ν en utilisant le théorème des résidus.

Puisque l'expression du propagateur a maintenant un seul pôle simple dans

$$\nu = -i\left[\frac{1}{2m\varpi}\left[\frac{\omega}{\varpi}p_0 + \frac{eE}{m\varpi}p_y\right]^2 + \frac{m}{2\varpi}\right] - \frac{1+s}{2}, \tag{4.54}$$

une intégration par rapport à ν donne le résultat ci-dessous

$$\begin{aligned}
&S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{1}{2\sqrt{2m\varpi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi} \\
&\exp i\left[-p_0\left(t_b - t_a\right) + p_y\left(y_b - y_a\right)\right] \\
&\times\sum_{s=\pm1}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]^\dagger\sigma_3 \\
&\times\frac{e^{\left(-\kappa+i\frac{s}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{(\sinh\kappa\pi)}\left[D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{i\kappa-\frac{1-s}{2}}\left(ise^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right. \\
&\left.+D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(-se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{i\kappa-\frac{1-s}{2}}\left(-ise^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.55}$$

où

$$\kappa = \frac{1}{2m\varpi}\left[\frac{\omega}{\varpi}p_0 + \frac{eE}{m\varpi}p_y\right]^2 + \frac{m}{2\varpi} \tag{4.56}$$

4.3 Les spineurs propres

Nous allons maintenant extraire les états propres de notre problème par l'application de l'opérateur de la projection globale O_+ sur $S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$. La substitution de (4.55) dans (2.8) mène à

$$\begin{aligned}
&S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = i\left[\sigma_3\left(i\frac{\partial}{\partial t_b} + eEx_b\right) - \sigma_2\frac{\partial}{\partial x_b} + i\sigma_1\left(\frac{\partial}{i\partial y_b} - m\omega x_b\right) + m\right] \\
&\frac{1}{2\sqrt{2m\varpi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi} \\
&\exp i\left[-p_0\left(t_b - t_a\right) + p_y\left(y_b - y_a\right)\right] \\
&\times\sum_{s=\pm1}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\right]^\dagger\sigma_3 \\
&\times\frac{e^{\left(-\kappa+i\frac{s}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{(\sinh\kappa\pi)}\left[D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{i\kappa-\frac{1-s}{2}}\left(ise^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right. \\
&\left.+D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(-se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{i\kappa-\frac{1-s}{2}}\left(-ise^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.57}$$

L'utilisation des identités facilement vérifiables suivantes

$$\begin{gathered}\sigma_1\chi_s = \chi_{-s}, \quad \sigma_2\chi_s = is\chi_{-s}, \quad \sigma_3\chi_s = s\chi_s, \\ \sigma_1 e^{A\sigma_2} = -e^{A\sigma_2}\sigma_1, \quad \sigma_3 e^{A\sigma_2} = -e^{A\sigma_2}\sigma_3,\end{gathered} \tag{4.58}$$

donne l'expression suivante

$$\begin{aligned}&S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{1}{2\sqrt{2m\varpi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi} \\ &\times \exp i\left[-p_0\left(t_b-t_a\right)+p_y\left(y_b-y_a\right)\right] \\ &\times\sum_{s=\pm1}\frac{e^{\left(-\kappa+i\frac{s}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{(\sinh\kappa\pi)}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\right]\left[\left(-i\frac{\omega}{\varpi}sp_0+sp_y\sinh\alpha+m\right)\chi_s\chi_s^+\right. \\ &\left.+\left(\left(\frac{ieE\sinh\alpha-im\omega\cosh\alpha}{\sqrt{2m\varpi}}\right)z_b-is\sqrt{2m\varpi}\frac{\partial}{\partial z_b}\right)\chi_{-s}\chi_s^+\right] \\ &\times\left[D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{\left(i\kappa-\frac{1-s}{2}\right)}\left(se^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right. \\ &\left.+D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(-se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{\left(i\kappa-\frac{1-s}{2}\right)}\left(-se^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right]\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\right]^{\dagger}\sigma_3\end{aligned} \tag{4.59}$$

Nous pouvons déduire l'identité suivante à partir des propriétés des fonctions paraboliques cylindriques

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dz}D_{-i\rho-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-\frac{i\pi}{4}}z\right) = &-i\tfrac{s}{2}zD_{-i\rho-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-\frac{i\pi}{4}}z\right) \\ &+se^{-\frac{i\pi}{4}}\left(\tfrac{i\rho(s-1)-(1+s)}{2}\right)D_{-i\rho-\frac{1-s}{2}}\left(se^{-\frac{i\pi}{4}}z\right)\end{aligned} \tag{4.60}$$

À l'aide de (4.60), nous pouvons transformer l'expression (4.59) à la suivante

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) &= \frac{1}{2\sqrt{2m\varpi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \\
&\times \exp i \left[-p_0 \left(t_b - t_a \right) + p_y \left(y_b - y_a \right) \right] \sum_{s=\pm 1} \frac{e^{\left(-\kappa + i\frac{s}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{\sinh\left(\kappa\pi\right)} e^{\frac{-\alpha}{2}\sigma_2} \\
&\Bigg\{ \left[\left(-i \left(\frac{s\omega}{\varpi} p_0 + \frac{seE}{m\varpi} p_y \right) + m \right) \chi_s \chi_s^+ \right] \\
&\times D_{-i\kappa - \frac{1+s}{2}} \left(se^{-i\frac{\pi}{4}} z_b \right) D_{\left(i\kappa - \frac{1-s}{2}\right)} \left(se^{i\frac{\pi}{4}} z_a \right) \\
&+ \left[\left(-i \left(\frac{s\omega}{\varpi} p_0 + \frac{seE}{m\varpi} p_y \right) + m \right) \chi_s \chi_s^+ \right] \\
&\times D_{-i\kappa - \frac{1+s}{2}} \left(-se^{-i\frac{\pi}{4}} z_b \right) D_{\left(i\kappa - \frac{1-s}{2}\right)} \left(-se^{i\frac{\pi}{4}} z_a \right) \\
&+ \left[\left(-i\sqrt{2m\varpi} \right) e^{-\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{i\kappa\left(s-1\right) - \left(1+s\right)}{2} \right) \chi_{-s} \chi_s^+ \right] \\
&\times D_{-i\kappa - \frac{1-s}{2}} (\left(se^{-\frac{i\pi}{4}} z_b \right)) D_{\left(i\kappa - \frac{1-s}{2}\right)} \left(se^{i\frac{\pi}{4}} z_a \right) \\
&+ \left[\left(i\sqrt{2m\varpi} \right) e^{-\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{i\kappa\left(s-1\right) - \left(1+s\right)}{2} \right) \chi_{-s} \chi_s^+ \right] \\
&\times D_{-i\kappa - \frac{1-s}{2}} (\left(-se^{-\frac{i\pi}{4}} z_b \right)) D_{\left(i\kappa - \frac{1-s}{2}\right)} \left(-se^{i\frac{\pi}{4}} z_a \right) \Bigg\} e^{\frac{-\alpha}{2}\sigma_2} \sigma_3
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

Le fait que s est un indice symétrique muet, il est possible alors de remplacer s par $-s$ dans les deux termes qui contiennent l'argument $\left(-se^{-i\frac{\pi}{4}} z_b \right)$ sans affecter la valeur du propagateur.

Une formule analogue à (4.61) est comme suit

$$
\begin{aligned}
&S^{c}(\mathbf{x}_{b,}\mathbf{x}_{a}) = \frac{1}{2\sqrt{2m\varpi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi} \\
&\exp i\left[-p_0\left(t_b-t_a\right)+p_y\left(y_b-y_a\right)\right]\times\sum_{s=\pm1}\frac{e^{\frac{-\kappa\pi}{2}}e^{\frac{-\alpha}{2}\sigma_2}}{\sinh\left(\kappa\pi\right)} \\
&\left\{\left[e^{i\frac{s\pi}{4}}\left(-i\left(\frac{s\omega}{\varpi}p_0+\frac{seE}{m\varpi}p_y\right)+m\right)\chi_s\chi_s^{+}\right]\right. \\
&\times D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{\left(i\kappa-\frac{1-s}{2}\right)}\left(se^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right) \\
&+\left[e^{i\frac{-s\pi}{4}}\left(i\left(\frac{s\omega}{\varpi}p_0+\frac{seE}{m\varpi}p_y\right)+m\right)\chi_{-s}\chi_{-s}^{+}\right] \\
&\times D_{-i\kappa-\frac{1-s}{2}}\left(se^{-i\frac{\pi}{4}}z_b\right)D_{\left(i\kappa-\frac{1+s}{2}\right)}\left(se^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right) \\
&+\left[\left(-i\sqrt{2m\varpi}\right)e^{i\frac{s\pi}{4}}e^{-\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{i\kappa\left(s-1\right)-\left(1+s\right)}{2}\right)\chi_{-s}\chi_s^{+}\right] \\
&\times D_{-i\rho-\frac{1-s}{2}}\left(se^{-\frac{i\pi}{4}}z_b\right)D_{\left(i\kappa-\frac{1-s}{2}\right)}\left(se^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right) \\
&+\left[\left(i\sqrt{2m\varpi}\right)e^{i\frac{-s\pi}{4}}e^{-\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{i\kappa\left(-s-1\right)-\left(1-s\right)}{2}\right)\chi_s\chi_{-s}^{+}\right] \\
&\left.\times\, D_{-i\kappa-\frac{1+s}{2}}\left(se^{-\frac{i\pi}{4}}z_b\right)D_{\left(i\kappa-\frac{1+s}{2}\right)}\left(se^{i\frac{\pi}{4}}z_a\right)\right\}e^{\frac{-\alpha}{2}\sigma_2}\sigma_3
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Les définitions données dans (4.31) permettent d'écrire le propagateur sous la forme factorisée suivante

$$
\begin{aligned}
&S^{c}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \exp i \left[-p_0 \left(t_b - t_a \right) + p_y \left(y_b - y_a \right) \right] \\
&\times \sum_{s=\pm 1} \frac{e^{\frac{-\kappa\pi}{2}} e^{\frac{-\mu}{2}\sigma_2} e^{\frac{-i\pi}{4}\sigma_2}}{2\sinh\left(\kappa\pi\right)} \\
&\times \left\{ \left[\frac{e^{\frac{-i\pi}{4}} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}} \left(-i \left(\frac{s\omega}{\varpi} p_0 + \frac{seE}{m\varpi} p_y \right) + m \right) \right] (s+1) + (1-s) \right]}{2} \right. \right. \\
&\times D_{-i\kappa - \frac{1+s}{2}} \left(s e^{-i\frac{\pi}{4}} z_b \right)) \chi_s \\
&+ \frac{\left[i \left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}} \left(i \left(\frac{s\omega}{\varpi} p_0 + \frac{seE}{m\varpi} p_y \right) + m \right) \right] (1-s) + (1+s) \right]}{2} \\
&\times D_{-i\kappa - \frac{1-s}{2}} \left(s e^{-i\frac{\pi}{4}} z_b \right) \chi_{-s} \Big] \\
&\times \left[\frac{\left\{ -i \left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}} \left(-i \left(\frac{s\omega}{\varpi} p_0 + \frac{seE}{m\varpi} p_y \right) + m \right) \right] (1-s) + (1+s) \right\}}{2} \right. \\
&\times D_{\left(i\kappa - \frac{1-s}{2}\right)} \left(s e^{i\frac{\pi}{4}} z_a \right) \chi_{-s}^{+} \\
&+ \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}} \left(i \left(\frac{s\omega}{\varpi} p_0 + \frac{seE}{m\varpi} p_y \right) + m \right) \right] (s+1) + (1-s) \right]}{2} \\
&\times D_{\left(i\kappa - \frac{1+s}{2}\right)} \left(s e^{i\frac{\pi}{4}} z_a \right) \chi_{s}^{+} \Big] e^{\frac{i\pi}{4}\sigma_2} e^{\frac{-\mu}{2}\sigma_2} s\sigma_3
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

où

$$
\alpha = \mu + i\frac{\pi}{2} \text{ and } \mu \in \mathbb{R}, \tag{4.64}
$$

L'expression (4.63) peut être réduite à la forme

$$
\begin{aligned}
S^{c}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) \quad &= \quad i \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_0}{2\pi} \left[s \Psi_{p_y,\, p_0}^{s} \left(x_b, y_b; t_b \right) \right. \\
&\quad \times \left(\Psi_{p_y,\, p_0}^{s} \left(x_a, y_a; t_a \right) \right)^{+} \sigma_3 \Big],
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

où les spineurs normalisés de notre système ont la forme

$$\Psi^{+}_{p_y,\,p_0}\left(x,y;t\right)=\frac{e^{\frac{-\kappa\pi}{4}}e^{-ip_0t}e^{ip_yy}}{\sqrt{2\sinh\left(\kappa\pi\right)}}\begin{pmatrix}\psi^{+}_{p_y,\,p_0}\\ \varphi^{+}_{p_y,\,p_0}\end{pmatrix}\tag{4.66}$$

avec

$$\begin{aligned}\psi^{+}_{p_y,\,p_0} &= e^{\frac{-i\pi}{4}}\left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}}\left(-i\left(\frac{\omega}{\varpi}p_0+\frac{eE}{m\varpi}p_y\right)+m\right)\right]\\ &\quad\times D_{-i\kappa-1}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\cosh\frac{\alpha}{2}+iD_{-i\kappa}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\sinh\frac{\alpha}{2},\end{aligned}\tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{+}_{p_y,\,p_0} &= -ie^{\frac{-i\pi}{4}}\left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}}\left(-i\left(\frac{\omega}{\varpi}p_0+\frac{eE}{m\varpi}p_y\right)+m\right)\right]\\ &\quad\times D_{-i\kappa-1}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\sinh\frac{\alpha}{2}+D_{-i\kappa}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\cosh\frac{\alpha}{2},\end{aligned}\tag{4.68}$$

et

$$\Psi^{-}_{p_y,\,p_0}\left(x_b,y_b;t_b\right)=\frac{e^{\frac{-\kappa\pi}{4}}e^{-ip_0t_b}e^{ip_yy_b}}{2\sqrt{\sinh\left(\kappa\pi\right)}}\begin{pmatrix}\psi^{-}_{p_y,\,p_0}\\ \varphi^{-}_{p_y,\,p_0}\end{pmatrix}\tag{4.69}$$

où

$$\begin{aligned}\psi^{-}_{p_y,\,p_0} &= i\left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}}\left(i\left(\frac{-\omega}{\varpi}p_0+\frac{-eE}{m\varpi}p_y\right)+m\right)\right]\\ &\quad\times D_{-i\kappa-1}\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\cosh\frac{\alpha}{2}+ie^{\frac{-i\pi}{4}}D_{-i\kappa}\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\sinh\frac{\alpha}{2},\end{aligned}\tag{4.70}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi^{-}_{p_y,\,p_0} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2m\varpi}}\left(i\left(\frac{-\omega}{\varpi}p_0+\frac{-eE}{m\varpi}p_y\right)+m\right)\right]\\ &\quad\times D_{-i\kappa-1}\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\sinh\frac{\alpha}{2}+e^{\frac{-i\pi}{4}}D_{-i\kappa}\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)\cosh\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}\tag{4.71}$$

4.4 Taux de production des paires dans le vide

Nous commençons avec la relation donnant l'action effective [54]

$$\ln S_0(A) = Tr \ln \left\{ \left(\gamma_\mu p^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m + i\varepsilon\right) \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m + i\varepsilon} \right\}. \tag{4.72}$$

Puisque la trace d'un opérateur est invariante sous la transposition et puisque la matrice de la charge congugée C satisfait

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \tag{4.73}$$

nous pouvons écrire

$$\ln S_0(A) = Tr \ln \left\{ \left[\gamma_\mu p^\mu - e\gamma_\mu A^\mu + m - i\varepsilon\right] \frac{1}{\left[\gamma_\mu p^\mu + m - i\varepsilon\right]} \right\} \tag{4.74}$$

et la somme de (4.72) et (4.74) donne

$$2 \ln S_0(A) = Tr \ln \left\{ \left[\left(\gamma_\mu p^\mu - e\gamma_\mu A^\mu\right)^2 - m^2 + i\varepsilon\right] \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} \tag{4.75}$$

Le taux de production, la probalité par unité de temps et par unité d'air (c-à-d. $\int$dtdxdy $= 1$), de paire neutre particule-antiparticule dans le vide est défini par [54]

$$w(x) = \mathrm{Re} \langle x| \, Tr \left(-2 \ln S_0(A)\right) |x\rangle$$

L'identité utile suivante

$$\ln \frac{a}{b} = \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \left(e^{i\lambda(b+i\varepsilon)} - e^{i\lambda(a+i\varepsilon)} \right) \tag{4.76}$$

nous permet de montrer que le taux de production prend la forme

$$w = \mathrm{Re} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \langle x| \, Tr \left[e^{i\frac{\lambda}{2}(\mathcal{H}+i\epsilon)} - e^{i\frac{\lambda}{2}\left(p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - m^2 + i\epsilon\right)} \right] |x\rangle \,. \tag{4.77}$$

Nous obtenons à partir de (4.39) par un calcul direct que

$$Tr\mathcal{F}(\lambda) = 2\cosh\left(\frac{\lambda m \varpi}{2}\right). \tag{4.78}$$

La substitution de $\mathcal{H}$ dans (4.77) en tenant compte de (4.78) permet d'écrire

$$\begin{aligned} w &= 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-i\frac{\lambda}{2}m^2}\left[\frac{dp_0}{2\pi}\frac{dp_y}{2\pi}\cosh\frac{\lambda m\varpi}{2}\right. \\ &\quad \times e^{i\frac{\lambda}{2}\left(p_0^2-p_x^2-p_y^2+(m\varpi)^2x^2+2m\omega x p_y+2e\hat{p}_0 Ex+i\epsilon\right)} \\ &\quad \left. -\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{i\frac{\lambda}{2}}}\right)e^{-\frac{\lambda}{2}\epsilon}\right] \end{aligned} \tag{4.79}$$

où, selon (4.42),

$$\begin{aligned} w &= 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-i\frac{\lambda}{2}m^2}\left[\frac{dp_0}{2\pi}\frac{dp_y}{2\pi}\cosh\frac{\lambda m\varpi}{2} e^{i\frac{\lambda}{2}\left(p_0^2-p_y^2-\left(\frac{m\omega p_y+eEp_0}{m\varpi}\right)^2+i\epsilon\right)}\right. \\ &\quad \left.\times K^{os}(x,x;\lambda) - \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{i\frac{\lambda}{2}}}\right)e^{-\frac{\lambda}{2}\epsilon}\right], \end{aligned} \tag{4.80}$$

avec

$$\begin{aligned} K^{os}(x,x;\lambda) &= \left(\frac{\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}}{2i\pi\sinh\left(\lambda\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}\right)}\right)^{1/2}\exp\left(i\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}\right. \\ &\quad \left.\times\,\widetilde{x}^2\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{e^2E^2-m^2\omega^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.81}$$

Afin d'évaluer (4.81), nous commencons par effectuer l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} &\int \frac{dp_y}{2\pi}\frac{dp_0}{2\pi} e^{i\frac{\lambda}{2}\left(p_0^2-p_y^2-\left(\frac{m\omega p_y+eEp_0}{m\varpi}\right)^2+i\epsilon\right)} e^{m\varpi\left(x+\frac{m\omega p_y+eEp_0}{(m\varpi)^2}\right)^2\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\pi}{i\frac{\lambda}{2}\cosh^2\alpha - i\frac{1}{m\varpi}\sinh^2\alpha\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times\int\frac{dp_y}{2\pi}\exp(-ap_y^2+bp_y+c), \end{aligned} \tag{4.82}$$

où

$$a = \frac{-i\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{m\varpi\left[\cosh^2\alpha - 2\sinh^2\alpha\frac{\tan\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{\lambda m\varpi}\right]}, \tag{4.83}$$

$$b = \frac{-2x\cosh\alpha\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{\left[\cosh^2\alpha - 2\sinh^2\alpha\frac{\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{\lambda m\varpi}\right]}, \tag{4.84}$$

$$c = \frac{-im\varpi x^2\cosh^2\alpha\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{\left[\cosh^2\alpha - 2\sinh^2\alpha\frac{\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{\lambda m\varpi}\right]} \tag{4.85}$$

et

$$\begin{aligned}&\int\frac{dp_y}{2\pi}\exp(-ap_y^2 + bp_y + c - \frac{\lambda}{2}\epsilon)\\ = \quad&\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi\left(m\varpi\left[\cosh^2\alpha - 2\sinh^2\alpha\frac{\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}{\lambda m\varpi}\right]\right)}{i\tanh\left(\frac{\lambda}{2}m\varpi\right)}}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\epsilon\right)\end{aligned} \tag{4.86}$$

Par la combinaison de (4.82) et (4.86), nous obtenons l'expression suivante pour le taux de production

$$\begin{aligned} w \quad = \quad \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}e^{-i\frac{\lambda}{2}m^2}e^{-\frac{\lambda}{2}\epsilon}&\left[\sqrt{\frac{1}{i\lambda}}\frac{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ &\left.\times\coth\left(\frac{\lambda\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}{2}\right) - \frac{2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{i\lambda}}\right]\end{aligned} \tag{4.87}$$

La représentation sous forme de série de la fonction exponentielle permet d'écrire

$$\pi\frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = x\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2 + k^2}, \tag{4.88}$$

qui n'est rien d'autre que le développement en série de $\pi\coth\pi x$.

Avec l'aide de (4.88), nous pouvons écrire (4.87) sous la forme suivante

$$w = \frac{4}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{Re}\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{i\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-i\frac{\lambda}{2}m^2}e^{-\frac{\lambda}{2}\epsilon}}{\lambda^2 + \left(\frac{2\pi k}{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}\right)^2} \tag{4.89}$$

ou encore sous la forme suivante

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{i\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\lambda}{2}m^2}}{\lambda^2 + \left(\frac{2\pi k}{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}\right)^2} \\
&\quad + \frac{2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{-i\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\lambda}{2}m^2}}{\lambda^2 + \left(\frac{2\pi k}{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.90}
$$

Un changement de variable au niveau du deuxième terme de (4.90) ($\lambda \rightarrow -\lambda$) donne l'expression suivante

$$
w = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{i\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\lambda}{2}m^2}}{\lambda^2 + \left(\frac{2\pi k}{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}\right)^2}. \tag{4.91}
$$

Selon [51],

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 + a^2\right)^{-1} (ix)^{-\nu}\, e^{-ixy} dx \\
&= \pi a^{-\nu-1} e^{-|y|a}
\end{aligned} \tag{4.92}
$$

où

$$
|\nu| < 1, \quad \mathrm{Re}\, a > 0, \quad \arg(ix) = \frac{\pi}{2} \ \text{ for } x > 0 \text{ and } \arg(ix) = -\frac{\pi}{2} \ \text{ for } x < 0, \tag{4.93}
$$

D'où nous pouvons obtenir

$$
w = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}\right)^{\frac{-3}{2}} e^{-\frac{\pi k m^2}{\sqrt{e^2E^2 - m^2\omega^2}}} \tag{4.94}
$$

4.5 Conclusion

Dans ce troisième chapitre, nous avons abordé le probléme de l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ éléctrique dans le cas où il n'y en a pas de confinement, c.-à-d dans la situation dans laquelle $eE > m\omega$. La méthode utilisés pour résoudre le problème est pareille à celle utilisée dans le chapitre précédent, à savoir, la technique des intégrales de chemins super-symétrique de Fradken-Gitman. Nous avons réussi à calculer la fonction de Green causale qui s'exprime à l'aide des fonctions cylindriques paraboliques, ce qui nous a permis d'extraire les spineurs propres. Par la suite, nous avons utilisé l'action efficace correspondant à notre système pour étudier le taux de production de paires. En effet, cela a permis d'obtenir un résultat sous forme d'une série dont les termes dépendent du champ électrique et de l'impulsion de l'oscillateur de Dirac.

Chapitre 5

Conclusion générale

Le but de ce travail a été l'étude de l'oscillateur de Dirac à (2+1) dimensions en présence de champ électrique uniforme dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins.

Dans le deuxième chapitre de la présente thèse, nous avons obtenu des solutions exactes pour l'oscillateur de Dirac à (2+1) dimensions en présence d'un champ électrique uniforme. Premièrement, en adoptant la même procédure que celle utilisée dans [40], nous avons utilisé l'approche nommée globale pour calculer, au préalable, la fonction de Green pour un Hamiltonien relatif, qui est le carré de notre Hamiltonien d'origine. Comparé à ce dernier, qui est un pur opérateur de fermi si l'on considère les matrices gamma comme des opérateurs de fermi, l' Hamiltonien relatif a l'avantage d'être un opérateur de type Bosonique et peut être exprimé, contrairement à celui d'origine, par la représentation du temps propre bosonique de Schwinger. Par après, nous avons introduit le spin dans le formalisme de l'intégrale de chemins en suivant la recette qui consiste à remplacer la matrice de spin σ par deux oscillateurs fermioniques dans l'espace des états cohérents, représentés par des variables de Grassmann, pour décrire la dynamique du spin. En vue de déterminer la fonction de Green relative, nous avons utilisé une transformation unitaire qui produit une intégrale fonctionnelle gaussienne pour la partie spinoriel du propagateur. Cela a permis d'effectuer l'intégration sur les variables de Grassmann et d'exprimer la fonction relative de Green uniquement via des intégrales de chemins bosoniques. L'intégration de la partie restante (bosonique) est essentiellement réalisée en mettant les expressions sous forme canonique et en utilisant le théorème des résidus pour obtenir la fonction relative de Green. À la fin de cette étape, nous avons récupéré la fonction de Green de notre problème initial à partir de la fonction relative, en agissant la projection globale sur cette dernière, pour écarter la partie superflue produite par son Hamiltonien relatif.

Dans le troisième chapitre, en utilisant l'approche super-symétrique des intégrales de chemins, nous avons résolu le problème relativiste de l'oscillateur de Dirac à $(2 + 1)$ dimensions en présence d'un champ électrique uniforme, et ce en utilisant la méthode de Fradkin-Gitman qui repose sur l'utilisation des sources Grassmaniennes. La fonction de Green est explicitement calculée en utilisant la technique dite de la projection globale, une variante de la méthode de Fradkin-Gitman, qui utilise un seul temps propre (temps propre de Schwinger) et épargne l'extension de l'algèbre de Dirac. Ensuite, nous avons calculé exactement les énergies et les spineurs propres exprimées en termes de polynômes d'Hermite. De plus, en utilisant diverses propriétés de symétrie du propagateur, nous l'avons représenté sous une forme nous permettant d'obtenir les spineurs, de manière naturelle et sans utiliser la condition de normalisation, directement sous forme normalisée. La limite non relativiste a également été analysée, et les fonctions d'onde et les énergies correspondantes ont été trouvées en accord avec les valeurs de la littérature. À la fin de ce chapitre, nous avons étudié la densité de courant et calculé les valeurs de ses différentes composantes.

Dans le quatrième chapitre, nous avons abordé notre problème dans le cas où il n'y en a pas de confinement, c.-à-d. dans la situation dans laquelle $eE > m\omega$. La méthode utilisée pour résoudre le problème est pareille à celle utilisée dans précédent chapitre, à savoir, la technique des intégrales de chemins super-symétrique de Fradken-Gitman. Nous avons réussi à calculer la fonction de Green causale qui s'exprime à l'aide des fonctions du cylindre parabolique, ce qui nous a permis d'extraire les spineurs propres grâce à certaines symétries du propagateur. Par la suite, nous avons utilisé l'action efficace correspondante à notre système pour étudier le taux de production de paires. En effet, cela a permis d'obtenir un résultat sous forme d'une série dont les termes dépendent du champ électrique et de l'impulsion de l'oscillateur.

Enfin, en ce qui concerne les futures applications potentielles, nous pensons qu'il serait intéressant de rechercher d'autres interactions pouvant être résolues dans le cadre de la méthode utilisée dans le premier chapitre, à savoir, les cas des problèmes où le spectre est continu, qui sont rarement abordées dans le cadre des intégrales de chemins pour la particule de Dirac. Également, il serait intéressant, comme conséquence naturelle de ce travail, d'analyser l'oscillateur de Dirac général en présence d'un champ électrique non uniforme dans l'espace commutatif et non commutatif.

Bibliographie

[1] R.P. Feynman and A.R. Hibbs : Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965.

[2] E. S. Fradkin : Nucl. Phys. 76, 588(1966).

[3] F.A. Berezin and M.S. Marinov : Ann. Phys. 104, 336 (1977).

[4] E.S. Fradkin, D.M. Gitman, Phys. Rev. D 44, 3230 (1991).

[5] D.M. Gitman, S.I. Zlatev, W.D. Cruz, Brazil. J. Phys. 26, 419 (1996).

[6] D.M. Gitman, S.I. Zlatev, Phys. Rev. D 55, 7701 (1997).

[7] S. Zeggari, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Czech. J. Phys. 51, 185 (2001).

[8] S. Zeggari, T. Boudjedaa, L. Chetouani, Phys. Scripta 64, 285 (2001).

[9] T. Boudjedaa, L. Chetouani, J. Phys. A 35, 1651 (2002).

[10] A. Merdaci, L. Boudiaf, L. Chetouani, Z. Naturforsch. 63a, 283 (2008).

[11] A. Merdaci, A. Jellal and L. Chetouani, Annals of Physics 384, 116(2017).

[12] A. Merdaci, A. Jellal, L. chetouani, Int. J. of Modern Phys A, Vol. 30, No. 27, 1550174 (2015).

[13] S. Haouat, L. Chetouani, Z. Naturforsch. 62a, 34 (2007).

[14] R. Rekioua, T. Boudjedaa, Eur. Phys. J. C 49, 1091 (2007).

[15] D. Ito, K. Mori, and E. Carrieri, Nuovo Cimento A 51, 1119 (1967).

[16] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A 22, L817 (1989).

[17] E. Sadurnı´, AIP Conf. Proc. 1334, 249 (2010).

[18] J. M. Torres, E. Sadurnı´, and T. H. Seligman, AIP Conf. Proc. 1323, 301 (2010).

[19] M. Hamzavi, M. Eshghi, and S. M. Ikhdair, J. Math. Phys. (N.Y.) 53, 082101 (2012).

[20] C.-K. Lu and I. F. Herbut, J. Phys. A 44, 295003 (2011).

[21] S. Zarrinkamar, A.A. Rajabi, and H. Hassanabadi, Ann. Phys. (Amsterdam) 325, 2522 (2010).

[22] Y. Chargui, A. Trabelsi, and L. Chetouani, Phys. Lett. A 374, 2907 (2010).

[23] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, and A. Luis, Phys. Rev. A 77, 063815 (2008).

[24] J. Munarriz, F. Dominguez-Adame, and R. P. A. Lima, Phys. Lett. A 376, 3475 (2012).

[25] J. Grineviciute and D. Halderson, Phys. Rev. C 85, 054617 (2012).

[26] A. Faessler, V. I. Kukulin, and M. A. Shikhalev, Ann. Phys. (Amsterdam) 320, 71 (2005).

[27] B.P. Mandal, S.K. Rai, Phys. Lett. A 376, 2467 (2012).

[28] G. Melo, M. Montigny, P. Pompeia, E. Santos, Int. J. Theor. Phys. 52, 441 (2013).

[29] Z.Y. Luo, Q. Wang, X. Li, J. Jing, Int. J. Theor. Phys. 51, 2143 (2012).

[30] R.V. Maluf, Int. J. Mod. Phys. A 26, 4991 (2011).

[31] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano, Phys. Rev. A 76, 041801 (2007).

[32] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano, Phys. Rev. Lett. 99, 123602 (2007).

[33] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, A. Luis, Phys. Rev. A 77, 063815 (2008).

[34] Y. Luo, Y. Cui, Z. Long, J. Jing, Int. J. Theor. Phys. 50, 2992 (2011).

[35] A. Jellal, A.El. Mouhafid, M. Daoud, J. Stat. Mech. 01, P01021 (2012).

[36] J. A. Franco-Villafañe, E. Sadurní, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, and T. H. Seligman, Phys. Rev. Lett., 111, 170405 (2013).

[37] V. M. Villalba, Phys. Rev. A, 49, 586 (1994).

[38] C. Quimbay and P. Strange, Preprint arXiv :1311, 2021 (2013).

[39] F.-L. Zhang, B. Fu, and J.-L. Chen, Phys. Rev. A 80, 054102 (2009).

[40] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, and A.W. Schreiber, Phys. Rev. A 59, 3 (1998).

[41] Y. Ohnuki, T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60, 548 (1978).

[42] N. V. Borisov, P. P. Kulish, Theoretical and Mathematical Physics, 51 :3, 535 (1982).

[43] L.S. Schulman : Techniques and Applications of Path Integration, John Wiley New York, (1981).

[44] M. Petras, Czech. J. Phys. B 39, 1208 (1989).

[45] A.O. Barut and N. Zanghi : Phys. Rev. Lett. 52, 2009 (1984).

[46] F.A. Berezin and M.S. Marinov : Ann. Phys. 104, 336 (1977).

[47] S.Houat and L.Chetouani, Int. J. Theor. Phys. V46, N°6, 57 (2007).

[48] S.Houat and L.Chetouani, J. Phys. A : Math. Theor. 40, 1349 (2007).

[49] T. Boudjedaa, A. Bounames, Kh. Nouicer, L. Chetouani, and T. F. Hammann : J. Math. Phys.

36, 1602 (1995) ; Physica Scripta 54, 225 (1996) ; 56, 545 (1998).

[50] M. Aouachria, L. Chetouani, Eur. Phys. J. C25, 333 (2002).

[51] I. S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York (1979).

[52] F. M. Toyama, Y. Nogami, F. A. B. Coutinho, J. Phys. A : Math. Gen.30, 2585(1997).

[53] A. O. Barut and I. H. Duru, Phys. Rev. D. 41, 4 (1990).

[54] Q-G Lin, J. Phys. G 25, 1793 (1999).

[55] D. Nath, P. Roy, Annals of Physics 351, 13 (2014).

[56] H.P. Laba, V.M. Tkachuk, Eur. Phys. J. Plus 133, 279 (2018).

[57] H. Kleinert, Path Integral in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics(World Scientic, Singapore, 1990).

Modern Physics Letters A
Vol. 34, No. 30 (2019) 1950246 (15 pages)

DOI: 10.1142/S0217732319502468

Dirac oscillator in a uniform electric field: Path integral treatment

Hassene Bada* and Mekki Aouachria
Laboratoire de Physique Energétique Appliquée (LPEA),
Département de Physique, Faculté des Sciences de la Matière,
Université Hadj Lakhdar – Batna 1, Algeria
**badahacene@yahoo.ca*

Received 5 March 2019
Revised 19 April 2019
Accepted 21 May 2019
Published 17 July 2019

In this paper, the propagator of a two-dimensional Dirac oscillator in the presence of a uniform electric field is derived by using the path integral technique. The fact that the globally named approach is used in this work redirects, beforehand, our search for the propagator of the Dirac equation to that of the propagator of its quadratic form. The internal motions relative to the spin are represented by two fermionic oscillators, which are described by Grassmannian variables, according to Schwinger's fermionic model. Once the integration over the anticommuting variables (Grassmannian variables) is accomplished, the problem becomes the one of finding a non-relativistic propagator with only bosonic variables. The energy spectrum of the electron and the corresponding eigenspinors are also obtained in this work.

Keywords: Path integral; Dirac oscillator; electric field; Green's function; Grassmann variables.

PACS Nos.: 03.65.Pm, 03.65.Ge

1. Introduction

The path integral has been greatly instrumental in the attempt to reconcile the quantum description of a physical system with its classical analog. However, it has been shown to be unsuitable for the case of the description of spin, which is a purely discrete physical entity without a classical analog, unlike the path integral, that is primarily based on classical descriptions, such as trajectories.

In the attempt to solve this difficulty, essentially two categories of path integral formulation have been used. The first one describes the boson spin dynamics by using commuting variables[1–4] and the second one uses anticommuting variables

*Corresponding author.

to describe fermion spin dynamics.[5] Some potentials in this last category have been treated by using the Fradkin and Gitman model,[6] which presents the Dirac propagator by using a Grassmann-ian path integral. This formalism was developed from the calculative point of view in the case of some concrete applications of external fields, such as a constant field, plane wave field, or their combination,[7–14] and the Dirac oscillators.[15,16]

Despite its importance, the Dirac oscillator has rarely been treated by using the path integral technique.

Historically speaking, the idea of Dirac's oscillator was first addressed by Ito *et al.*[17] when they approached the Dirac equation with a linear harmonic potential $-im\omega\beta\alpha.\mathbf{r}$. In 1989, this concept was further developed by Moshinsky and Szczepaniak.[18] Originally, it was known as the Dirac oscillator (DO).[19,20] They called it the Dirac oscillator because in the non-relativistic limit it behaves as a harmonic oscillator with a strong spin–orbit coupling term. Thereafter, because of its wide applicability, it has become an extensive field of research in different fields of physics. The Dirac oscillator appears in mathematical physics,[21–25] nuclear physics,[26–28] noncommutative geometry[29–32] and in quantum optics, to study the properties of the (Anti)-Jaynes–Cummings model.[33–37] Besides, it is important to note that the one-dimensional Dirac oscillator had its first experimental realization,[38] which gives the system promising application perspectives. The Dirac oscillator in (2+1) dimensions has also been studied by Villalba.[39] Additionally, this system was proposed in Ref. 40 to describe some electronic properties of monolayer and bilayer graphene. In mathematical physics, it has also attracted much attention in the domain of exactly solvable models and symmetries. Interestingly, even the Higgs symmetry has been considered in this context.[41]

In close relation to our study, we mention Ref. 42, where the authors resolve the $(2+1)$-dimensional massless Dirac oscillator in the presence of perpendicular magnetic and transverse electric fields. The energies are obtained and the wave function is written in terms of the Hermit polynomials.

In this regard, it is worth mentioning that the general Dirac oscillator subjected to a non-uniform electric field was studied in Ref. 43. It was found, in this reference, that in the case of specially chosen electric field, the eigenvalue equation can be resolved exactly. The energies of the Dirac oscillator in a uniform electric field were presented explicitly in that work. It was also demonstrated that adequately strong electric field destroys the bounded states.

In this paper, we propose to treat the problem of the $(2+1)$-dimensional Dirac oscillator particle moving in a uniform electric field with the path integral approach. The fact that we use the globally named approach in this work redirects, beforehand, our search for the propagator of the Dirac equation to that of the propagator of its quadratic form.[44] The superfluous or non-physical states resulting from this procedure are subsequently discarded from the solution by the application of the global projection operator. Since the new Hamiltonian is expressed by using Pauli matrices, we introduce the spin in the path integral formalism by replacing them with two fermionic oscillators according to the Schwinger model.[45]

It should be noted that an attempt has already been made in the case of the Dirac field to obtain a path integral formalism, similar to that of the Schwinger model, without resorting to sources to introduce Dirac's gamma matrices.[46] To the best of our knowledge, the $(2+1)$-dimensional Dirac oscillator in a uniform electric field has not been explored with the path integral approach before. This is possibly the first attempt. We also believe that the simplicity of the method used here will facilitate the widening of the family of problems solved by this technique.

The paper is organized as follows. In Sec. 2, we show how one can use the global projection, rather than a local one, for the $(2+1)$-dimensional Dirac oscillator in an electric field; in Sec. 3, we give a path integral formulation for the problem in question; in Sec. 4, we calculate the causal Green's function, and extract the energies and the normalized wave functions. In Sec. 5, we validate the accuracy of our solution. In Sec. 6, results are discussed and suggestions for future research are offered. Section 7 is devoted to the conclusion.

2. Global Projection

The propagator of the Dirac equation is the causal Green's function $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ solution of the equation (setting $\hbar = c = 1$)

$$(\gamma^\mu(i\partial_{b\mu} - eA_\mu(\mathbf{x}_b)) - m)S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{1}$$

where e describes the charge of the particle and the label c stands for causal. Dirac gamma-matrices (γ-matrices) satisfy

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_4, \quad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu}, \tag{2}$$

where $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, the spin tensor $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu$, $\mathbb{I}_4$ the unit 4×4 matrix and $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

The fact that we work in $(2+1)$ dimensions allows us to express them in terms of Pauli matrices as follows:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_2, \quad \gamma^2 = -i\sigma_1. \tag{3}$$

We present $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ as the matrix element in the coordinate space of the operator S^c,

$$S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b | S^c | \mathbf{x}_a \rangle, \tag{4}$$

where S^c is given by

$$S^c = -(\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m)^{-1}. \tag{5}$$

By using (5), we write

$$S^c = -O_-^{-1} = -O_+(O_-O_+)^{-1} = -O_+(O_+O_-)^{-1}, \tag{6}$$

where O_- and O_+ are the Dirac operator and the global projection operator, respectively,

$$O_\pm = \gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) \pm m. \tag{7}$$

Then the global representation for the causal Green's function $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ is obtained by considering (6) and inserting the completeness relation $\int |z\rangle\langle z|\, d^3z = 1$ between the operators O_+ and $(O_-O_+)^{-1}$ in (4) to get

$$S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = (\gamma^\mu(i\partial_{b\mu} - eA_\mu) + m)S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a), \tag{8}$$

where the new Green's function $S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$, that we suggest to calculate via path integration, is defined as

$$S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b| - (O_-O_+)^{-1}|\mathbf{x}_a\rangle = \langle \mathbf{x}_b| - (O_+O_-)^{-1}|\mathbf{x}_a\rangle, \tag{9}$$

where the label g stands for global.

The global projection operator O_+ in (8) will eliminate the superfluous states resulting from the action of $(O_-O_+)^{-1}$.

This procedure has been used in Ref. 44 for the derivation of the path integral representation for the propagator systematically without the usual five-dimensional extension (i.e. without γ^5) and it has also been employed in Refs. 47 and 48 to obtain a Bose-type operator having a quadratic form with respect to γ-matrices. In the present work, we use this procedure, as in Ref. 8, because we have to work in spacetime with odd dimensions where there is no γ^5 matrix.

It is clear from (1) and (8) that the matrix element of S^c_g verifies the quadratic Dirac equation

$$\mathcal{H}S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{10}$$

where $\mathcal{H}$ is given by

$$\mathcal{H} = O_-O_+ = O_+O_-. \tag{11}$$

Specifically, let us consider the $(2+1)$-dimensional Dirac oscillator in a uniform electric field described by the 3-potential

$$A_0 = -Ex, \quad A_x = 0, \quad A_y = 0. \tag{12}$$

The Dirac oscillator in the x-direction is obtained by the following non-minimal substitution into the operators O_- and O_+, given in (7):

$$\hat{p}_x \to \hat{p}_x - im\omega\hat{x}\gamma^0, \tag{13}$$

$$\hat{p}_y \to \hat{p}_y. \tag{14}$$

Here, ω is the oscillator frequency. By considering (7), we can write

$$O_- = \sigma_3(\hat{p}_0 + eE\hat{x}) - i\sigma_2\hat{p}_x + i\sigma_1(\hat{p}_y - m\omega\hat{x}) - m, \tag{15}$$

$$O_+ = \sigma_3(\hat{p}_0 + eE\hat{x}) - i\sigma_2\hat{p}_x + i\sigma_1(\hat{p}_y - m\omega\hat{x}) + m. \tag{16}$$

Therefore,

$$\mathcal{H} = O_- O_+ = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - (m^2\omega^2 - e^2E^2)\hat{x}^2 + 2m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0E\hat{x} - m^2 - ieE\sigma_1 + m\omega\sigma_3, \tag{17}$$

is the explicit expression of the operator $\mathcal{H}$ which will play a role of the Hamiltonian for our quantum-mechanical system.

3. Path-Integral Formulation for the (2 + 1)-Dimensional Dirac Oscillator in the Presence of an Electric Field

Now, we focus on some definitions properties and notations needed for further developments.

As we are interested in the spin–field interaction, we shall use the same procedure as in Refs. 49 and 50, where we replace the Pauli matrices σ_i with a pair of fermionic operators (u, d) known as the Schwinger fermionic model of spin following the procedure:

$$\sigma_i \to (u^+, d^+)\sigma_i \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \eta^+\sigma_i\eta, \tag{18}$$

where the pair (u, d) describes two-dimensional fermionic oscillators.

Incidentally, the spin eigenstates $|\uparrow\rangle$ and $|\downarrow\rangle$ are generated from the fermionic vacuum state $|0, 0\rangle$ by the action of the fermionic oscillators u^+ and d^+ following the relations:

$$u^+|0, 0\rangle = |\uparrow\rangle \quad \text{and} \quad d^+|0, 0\rangle = |\downarrow\rangle, \tag{19}$$

where the action of u and d on this vacuum state is given by the vanishing results

$$u|0, 0\rangle = 0 \quad \text{and} \quad d|0, 0\rangle = 0. \tag{20}$$

The fermionic oscillator pair (u, d) and its adjoint (u^+, d^+) satisfy the usual fermionic algebra defined by the following anticommutator relations:

$$[u, u^+]_+ = 1 \quad \text{and} \quad [d, d^+]_+ = 1, \tag{21}$$

where all other anticommutators vanish.

The notation $[A, B]_+$ stands for

$$[A, B]_+ = AB + BA. \tag{22}$$

We now introduce coherent states relative to this fermionic oscillator algebra. These states are generally defined as eigenvectors of the fermionic oscillators u and d:

$$u|\alpha, \beta\rangle = \alpha|\alpha, \beta\rangle = \alpha|\eta\rangle, \quad d|\alpha, \beta\rangle = \beta|\alpha, \beta\rangle = \beta|\eta\rangle, \tag{23}$$

where

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad 0\eta^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix}, \quad |\eta\rangle \equiv |\alpha, \beta\rangle, \quad \langle\eta| \equiv \langle\bar{\beta}, \bar{\alpha}| \tag{24}$$

and (α, β) is a pair of Grassmmann variables, which are anticommuting with fermionic oscillators and with themselves, namely,

$$\begin{cases} [\alpha, u]_+ = [\alpha, u^+]_+ = [\alpha, d]_+ = [\alpha, d^+]_+ = 0 \\ [\beta, u]_+ = [\beta, u^+]_+ = [\beta, d]_+ = [\beta, d^+]_+ = 0 \end{cases} \tag{25}$$

and are commuting with vacuum states

$$\begin{cases} \alpha|0,0\rangle = |0,0\rangle\alpha, \quad \langle 0,0|\alpha = \langle 0,0|\alpha \\ \beta|0,0\rangle = |0,0\rangle\beta, \quad \langle 0,0|\beta = \langle 0,0|\beta \end{cases}. \tag{26}$$

The above definitions are equivalent to the fact that these states are generated from the vacuum state according to the following relation:

$$|\eta\rangle = |\alpha, \beta\rangle = \exp(-\alpha u^+ - \beta\, d^+)|0,0\rangle. \tag{27}$$

The main properties of these states are: the completeness relation

$$\int d\eta^*\, d\eta \exp(-\eta^*\eta)|\eta\rangle\langle\eta| = 1 \tag{28}$$

and the non-orthogonality

$$\langle \eta \,|\, \eta'\rangle = e^{\eta^*\eta'}. \tag{29}$$

Taking into account the previous properties and notations allows us to write the Hamiltonian $\mathcal{H}$ in the following fermionic form:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - (m^2\omega^2 - e^2E^2)\hat{x}^2 + 2m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0E\hat{x} \\ - m^2 - ieE\eta^+\sigma_1\eta + m\omega\eta^+\sigma_3\eta. \end{aligned} \tag{30}$$

According to the usual construction procedure of the path integral, we define the propagator as the matrix element of the evolution operator $\mathbf{U}(\lambda)$ between the initial state $|\mathbf{x}_{a,}\eta_a\rangle$ and the final state $|\mathbf{x}_{b,}\eta_b\rangle$. It can be represented by the Schwinger proper-time method in the following manner:

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \eta_b, \eta_a) = \frac{-i}{2}\int_0^\infty d\lambda\langle \mathbf{x}_{b,}\eta_b| \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\lambda (\mathcal{H} + i\varepsilon)dt\right)|\mathbf{x}_{a,}\eta_a\rangle. \tag{31}$$

To move to the path-integral representation, we discretize the time interval $[0, \lambda]$ into $N+1$ intermediate moments of length $\epsilon = \frac{\lambda}{N+1}$ each and we write $\exp(i\lambda\mathcal{H}) = [\exp(i\lambda\mathcal{H})\varepsilon]^{N+1}$. Thus, by using the Totter formula and after introducing, at each intermediate instant of time, the resolution of the identity

$$\int |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|d^3\mathbf{x} = 1, \tag{32}$$

$$\int d\eta^*\, d\eta \exp(-\eta^*\eta)|\eta\rangle\langle\eta| = 1, \tag{33}$$

and

$$\int |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|d^3\mathbf{p} = 1, \tag{34}$$

we obtain the following path integral condensed form of the propagator:

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\eta_b,\eta_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int DtDp_0 \int DxDp_x \int DyDp_y\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta^* \times \exp\left\{ i\int_0^1 \left[-p_0\dot{t} + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + \frac{1}{2}\lambda p_0^2 - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda p_y^2 - \frac{1}{2}\lambda(m^2\omega^2 - e^2E^2)x^2 - \frac{\lambda}{2}m^2 + 2m\omega x p_y + 2eEp_0x - i\frac{1}{2}\lambda eE\eta^*\sigma_1\eta - \frac{1}{2}\lambda m\omega\eta^*\sigma_3\eta + \frac{i}{2}(\eta^*\dot{\eta} - \dot{\eta}^*\eta)\right] d\tau \right\}, \quad (35)$$

where $\mathbf{x} = (t,x,y)$ and η satisfies the boundary conditions

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_b, \quad \eta(0) = \eta_a, \quad \eta(1) = \eta_b. \quad (36)$$

4. Exact Calculation for the Green's Function

Having shown how to formulate the problem of the $(2+1)$-dimensional Dirac oscillator in a uniform electric field in the framework of Feynman path integrals, we now go to the calculation of Green's function S_g^c when $m^2\omega^2 > e^2E^2$.

Integrating over the paths t and y, we can see that the momenta become constants of motion.

$$p_0(\lambda) = p_0 = \text{const.}, \quad p_y(\lambda) = p_y = \text{const.}, \quad (37)$$

and the propagator takes the form

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\eta_b,\eta_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0(t_b-t_a) + p_y(y_b-y_a) + \frac{1}{2}\lambda(p_0^2 - p_y^2 - m^2)\right] \int DxDp_x\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta^* \exp\left\{ i\int_0^1 \left[p_x\dot{x} - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda(m^2\omega^2 - e^2E^2)x^2 + \lambda m\omega x p_y + \lambda eEp_0x - i\frac{1}{2}\lambda eE\eta^*\sigma_1\eta + \frac{1}{2}\lambda m\omega\eta^*\sigma_3\eta + \frac{i}{2}(\eta^*\dot{\eta} - \dot{\eta}^*\eta)\right] d\tau \right\}, \quad (38)$$

from which we obtain what follows after taking the Gaussian integral over p_x and completing the square

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a,\eta_b,\eta_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0(t_b-t_a) + p_y(y_b-y_a) + \frac{1}{2}\lambda(p_0^2 - p_y^2 - m^2) + \frac{1}{2}\lambda\frac{(m\omega p_y + eEp_0)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right]$$

$$\times \int Dx\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\eta^* \exp\left\{i\int_0^1 \left[\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}(\eta^*\dot{\eta} - \dot{\eta}^*\eta)\right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}\lambda(m^2\omega^2 - e^2E^2)\left(x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\eta^*(\sigma_3\cosh\alpha - i\sigma_1\sinh\alpha)\eta\right] d\tau\right\}, \quad (39)$$

where

$$\cosh\alpha = \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}, \quad \sinh\alpha = \frac{eE}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}. \quad (40)$$

To dispense with the speed α from the propagator, we introduce the unitary transformation

$$\begin{cases} \eta \to \xi, & \eta^* \to \xi^*, \\ \eta = e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\xi, & \eta^* = \xi^* e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} \end{cases} \quad (41)$$

and taking into account

$$\sigma_3\cosh\alpha - i\sinh\alpha\sigma_1 = \sigma_3 e^{\alpha\sigma_2} = e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\sigma_3 e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}. \quad (42)$$

The propagator in this case takes the form

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \xi_b, \xi_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0(t_b - t_a) + p_y(y_b - y_a)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\lambda(p_0^2 - p_y^2 - m^2) + \frac{1}{2}\lambda\frac{(m\omega p_y + eEp_0)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right]\int Dx\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi^*$$
$$\times \exp\left\{i\int_0^1 \left[\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}(\xi^*\dot{\xi} - \dot{\xi}^*\xi) - \frac{1}{2}\lambda(m^2\omega^2 - e^2E^2)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\xi^*\sigma_3\xi\right] d\tau\right\}. \quad (43)$$

As shown in Ref. 49, we now integrate over the Grassmann variable, which is a Gaussian functional integral, the result being

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i\left[-p_0(t_b - t_a) + p_y(y_b - y_a)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\lambda(p_0^2 - p_y^2 - m^2) + \frac{1}{2}\lambda\frac{(m\omega p_y + eEp_0)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right]$$
$$\times e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2} e^{i\frac{1}{2}\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\sigma_3} e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} K^{os}(x_a, x_b; \lambda), \quad (44)$$

where K^{os} is the propagator related to the paths $x(\tau)$ and expresses the motion of a particle subjected to harmonic oscillations with a frequency $\Omega = \lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}$ and mass $\frac{1}{\lambda}$, which is

$$K^{os}(x_a, x_b; \lambda) = \int Dx \exp i \int_0^1 \left(\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 - \frac{1}{2\lambda}\Omega^2\left(x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2\right) d\tau. \quad (45)$$

The integral over the paths $x(\tau)$ is well known and equals

$$\begin{aligned} K^{os}&(x_a, x_b; \lambda) \\ &= \left(\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2i\pi\sin(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2})}\right)^{1/2} \\ &\quad \times \exp\left(i\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\frac{(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2)\cos\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right) - 2\tilde{x}_b\tilde{x}_a}{2\sin(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2})}\right), \end{aligned} \quad (46)$$

where

$$\tilde{x} = x - \frac{m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}. \quad (47)$$

The propagator K^{os} can be expressed by using its known expression, namely, its spectral decomposition,[51] as follows:

$$\begin{aligned} K^{os} = \sum_{n=0}^{+\infty}&\left[\frac{\sqrt{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}/\pi}}{2^n n!}e^{-i\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2)}\right. \\ &\left.\times H_n((m^2\omega^2 - e^2E^2)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_b)H_n((m^2\omega^2 - e^2E^2)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_a)\right], \end{aligned} \quad (48)$$

where H_n is the Hermite polynomial.

Let us insert the identity $\sum_{s=\pm1}\chi_s\chi_s^+ = \mathbb{I}_2$ in (44) while taking account of the equation of the spin operator $\sigma_3\chi_s = s\chi_s$. The causal Green's function S_g^c in this case becomes

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\frac{i}{2}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}\exp i&\left[-p_0(t_b - t_a) + p_y(y_b - y_a)\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\lambda(p_0^2 - p_y^2 - m^2) + \frac{1}{2}\lambda\frac{(m\omega p_y + eEp_0)^2}{m^2\tilde{\omega}^2}\right] \\ &\times \sum_{s=\pm1} e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}e^{i\frac{1}{2}\lambda m\tilde{\omega}s}\chi_s\chi_s^+ e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}e^{-i\lambda m\tilde{\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right. \\ &\left.\times e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2)}H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)\right], \end{aligned} \quad (49)$$

where

$$\chi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s \\ 1-s \end{pmatrix}, \quad m\tilde{\omega} = \sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2} \tag{50}$$

and $\mathbb{I}_2$ the unit 2×2 matrix.

An integration over λ at this step gives the expression

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}e^{-ip_0(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)} \\ &\times \sum_{s=\pm 1} e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+ e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2)} \\ &\times \frac{H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)}{\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2}\left[\left(p_0+\frac{ep_yE}{m\omega}\right)^2 - E_{n,s}^2\right]}, \end{aligned} \tag{51}$$

which has the poles

$$p_0 = \pm E_{n,s} - \frac{eEp_y}{m\omega}, \tag{52}$$

where

$$E_{n,s} = \sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}. \tag{53}$$

As in Ref. 14, the application of the residue theorem at pole p_0 allows one to write

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(p_0)\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{-ip_0T}}{p_0^2-E_{n,s}^2} = -i\sum_{\epsilon=\pm 1} f(\epsilon E_{n,s})\frac{e^{-i\epsilon E_{n,s}(t_b-t_a)}}{2E_{n,s}}\Theta(\epsilon(t_b-t_a)), \tag{54}$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside function. Using the above identity leads to the following result:

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = i\sum_{\epsilon=\pm 1}\sum_{s=\pm 1}\sum_{n=0}^{+\infty}\Bigg\{ &\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_y}{2\pi}e^{-i\xi_{p_y,n}^{\epsilon,s}(t_b-t_a)+ip_y(y_b-y_a)} \\ &\times \Theta(\epsilon(t_b-t_a))e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} \\ &\times \frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\frac{\tilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2)} \\ &\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{b,p_y,n}^{\epsilon,s}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{a,p_y,n}^{\epsilon,s}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{55}$$

and the energies $\mathcal{E}_{p_y,n}^{\epsilon,s}$ of our system are

$$\mathcal{E}_{p_y,n}^{\epsilon,s} = \epsilon\sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)} - \frac{eE}{m\omega}p_y, \tag{56}$$

where

$$\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n} = x - \frac{m\omega p_y + eE\xi^{\epsilon,s}_{p_y,n}}{m^2\omega^2 - e^2E^2}, \quad \epsilon = \pm 1. \tag{57}$$

In the particular case, when $p_y = 0$, this result agrees exactly with that of Ref. 43.

When $E \to 0$, the expression (56) reduces to the well-known expression for the Dirac oscillator energy eigenvalues.[52] The presence of the electric field suppresses the degeneracy in the y-direction.

Let us now extract the Dirac oscillator states by applying the global projection operator O_+ on $S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$. The substitution of (55) into (8) yields

$$\begin{aligned} S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = {} & i(\gamma^\mu(i\partial_{\mu b} - eA_{\mu b}) + m) \sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} \Theta(\epsilon(t_b - t_a)) \right. \\ & \times e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n}(t_b - t_a) + ip_y(y_b - y_a)} \frac{\tilde{\omega}\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^{n+1}n!\omega\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)}} \\ & \times e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^+ e^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2)} \\ & \left. \times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{b,p_y,n}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{a,p_y,n}\right) \right\}, \end{aligned} \tag{58}$$

which can be simplified to obtain

$$\begin{aligned} S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = {} & -i \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{s=\pm1}\sum_{\epsilon=\pm1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_y}{2\pi} [s\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x_b, y_b; t_b)(\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x_a, y_a; t_a))^+ \\ & \times \sigma_3\Theta(\epsilon(t_b - t_a))], \end{aligned} \tag{59}$$

where eigenspinors $\Psi^{\epsilon}_{p_y,n,s}(x, y; t)$ of our problem can be obtained as

$$\begin{aligned} \Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x, y; t) = {} & \mathcal{N}^{\epsilon,s}_n \left[\sigma_3(\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n} + eEx) - \sigma_2\frac{\partial}{\partial x} + i\sigma_1(p_y - m\omega x) + m \right] \\ & \times e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n}t + ip_y y} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\tilde{x}^2_{\mathcal{E},p_y}} H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s \end{aligned} \tag{60}$$

and $\mathcal{N}^{\epsilon,s}_n$ is the normalization factor.

By considering (60) and using the identity

$$e^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2} = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sigma_2 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right), \tag{61}$$

we obtain the normalized eigenspinors $\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x, y; t)$ of the Dirac oscillator in a constant electric field as follows:

$$\Psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x, y; t) = \mathcal{N}^{\epsilon,s}_n \begin{pmatrix} \psi^{\epsilon,s}_{p_y,n} \\ \varphi^{\epsilon,s}_{p_y,n} \end{pmatrix} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}(\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n})^2} e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon,s}_{p_y,n}t + ip_y y}, \tag{62}$$

where

$$\psi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x) = \left[\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\epsilon E_{n,s} + sm\right)\left(\frac{1+s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2} - \frac{1-s}{2}i\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$\times H_n\big(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\big) + \sqrt{m\tilde{\omega}}\left[(1+s)n\sinh\frac{\alpha}{2} - \frac{1-s}{2}i\cosh\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$\times H_{n-s}\big(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\big), \tag{63}$$

$$\varphi^{\epsilon,s}_{p_y,n}(x) = \left[-\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\epsilon E_{n,s} + sm\right)\left(i\frac{1+s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2} + \frac{1-s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$\times H_n\big(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\big) - \sqrt{m\tilde{\omega}}\left[\frac{1-s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2} + in(1+s)\cosh\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$\times H_{n-s}\big(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{\epsilon,s}_{p_y,n}\big) \tag{64}$$

and

$$|\mathcal{N}^{\epsilon,s}_n| = \frac{\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}}\left[\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\epsilon E_{n,s} + sm\right)^2 + 2\left(n + \frac{1-s}{2}\right)m\omega\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{65}$$

However, when $E \to 0$ and $p_y \to 0$ simultaneously, the normalized wave function can be written as

$$\Psi^{\epsilon+}_{p_y,n}(x,y;t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^n n!}\frac{E_{n,+}+\epsilon m}{2E_{n,+}}}H_n\big(\sqrt{m\omega}x\big) \\ -i\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{E_{n,+}-\epsilon m}{2E_{n,+}}}H_{n-1}\big(\sqrt{m\omega}x\big) \end{pmatrix} e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}e^{-i\epsilon E_{n,+}t}. \tag{66}$$

This result agrees with that of Ref. 52.

5. Equivalence with the Dirac Equation

Having solved the Dirac oscillator in a constant electric field problem by using the path integral technique, we show that our spinors verify the first-order Dirac equation

$$O_-\Psi^{\epsilon}_{p_y,n,s}(x,y;t) = 0. \tag{67}$$

By direct calculations, we get the result below for the case $s = +1$.

$$O_-\Psi^{\epsilon+}_{p_y,n}(x,y;t) = \mathcal{N}^{\epsilon+}_n\begin{pmatrix} \mathcal{P}H_n + \mathcal{Q}H_{n-1} \\ \mathcal{R}H_n + \mathcal{T}H_{n-1} \end{pmatrix} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}(\tilde{x}^{\epsilon+}_{py,n})}e^{-i\mathcal{E}^{\epsilon+}_{p_y,n}t+ip_y y}, \tag{68}$$

where

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\epsilon E_{n,+} + m\right)\left[\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m(\tilde{\omega}+\omega)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{p_y}{m\omega}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\epsilon E_{n,+}}{m\tilde{\omega}}\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m(\tilde{\omega}-\omega)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\right], \quad (69)$$

$$\mathcal{Q} = 2n\sqrt{m\tilde{\omega}}\left[\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m(\tilde{\omega}-\omega)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{p_y}{m\omega}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\epsilon E_{n,+}}{m\tilde{\omega}}\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m(\tilde{\omega}+\omega)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\right], \quad (70)$$

$$\mathcal{R} = i\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\epsilon E_{n,+} + m\right)\left[\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m(\tilde{\omega}-\omega)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{p_y}{m\omega}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\epsilon E_{n,+}}{m\tilde{\omega}}\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m(\omega+\tilde{\omega})\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\right], \quad (71)$$

$$\mathcal{T} = 2in\sqrt{m\tilde{\omega}}\left[\left(eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m(\tilde{\omega}+\omega)\sinh\frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{p_y}{m\omega}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\epsilon E_{n,+}}{m\tilde{\omega}}\left(eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m(\tilde{\omega}-\omega)\cosh\frac{\alpha}{2}\right)\right]. \quad (72)$$

Taking into account (40), we obtain, respectively, that

$$eE\cosh\frac{\alpha}{2} - m(\tilde{\omega}+\omega)\sinh\frac{\alpha}{2} = 0 \quad (73)$$

and

$$eE\sinh\frac{\alpha}{2} + m(\tilde{\omega}-\omega)\cosh\frac{\alpha}{2} = 0. \quad (74)$$

Identities (73) and (74) imply that each of the factors defined in (69)–(72) is equal to 0, which validates (67) when $s = +1$.

The validation of the solution for the case $s = -1$ can be verified with a similar reasoning.

6. Results and Discussions

In this work, we have obtained exact solutions for the two-dimensional Dirac oscillator in the presence of a uniform electric field. Firstly, by adopting the same procedure employed in Ref. 44, we have used the globally named approach in order to calculate, beforehand, the Green's function for a relative Hamiltonian, which is the square of our original Hamiltonian. Compared to the latter, which is a pure fermi operator if we consider the gamma matrices as fermi operators, the relative Hamiltonian has the advantage to be a Bose-type operator and can be expressed, unlike the original one, by Schwinger–Boson proper time representation. After that, we have introduced the spin into the path integral formalism by following the recipe, which is to replace the spin matrix σ by two fermionic oscillators, represented by Grassmann variables, to describe the dynamics of the spin. In order to determine the relative Green's function, we used a unitary transformation that produces a Gaussian functional integral for the spinor part of the propagator. This allowed performing the integration over the Grassmann variables and expressing the relative Green's function only via bosonic path integrals. The integration of the remaining (bosonic) part is essentially performed by putting the terms in canonical form and using the residue theorem to obtain the relative Green's function. Following the completion of this stage, we recovered Green's function of our original problem from the relative one, by acting the global projection on this latter, to discard the superfluous part produced by its relative Hamiltonian.

As for future potential applications, we feel it would be of interest to search for other interactions solvable within the present method in the case of continuous spectrum, which are rarely represented in the frame of the path integral for Dirac propagator. Finally, it would be interesting, as a natural consequence of this work, to analyze the general Dirac oscillator in the presence of a non-uniform electric field as well as the non-confined situation of the present study. This analysis could be considered later.

7. Conclusion

In this paper, using the path-integral approach, we have solved the problem of the (2+1)-dimensional Dirac oscillator in the presence of a uniform electric field. Green's function is presented in the so-called global projection, where the internal motions relative to the spin are replaced by two fermionic oscillators, which are described by Grassmannian variables. We have exactly calculated the causal Green's function, energies and the eigenspinors expressed in terms of Hermite polynomials.

Finally, using the Feynman approach to represent the propagator of the Dirac oscillator in uniform electric field allowed a more intuitive way to interpret its quantum dynamics through trajectories and to derive the eigenfunctions in normalized form. By this work, the list of relativistic quantum problems that can be solved using path integrals has been extended to the Dirac oscillator in presence of a uniform electric field.

References

1. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965).
2. L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (John Wiley, 1981).
3. M. Petras, *Czech. J. Phys. B* **39**, 1208 (1989).
4. A. O. Barut and N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009 (1984).
5. F. A. Berezin and M. S. Marinov, *Ann. Phys.* **104**, 336 (1977).
6. E. S. Fradkin and D. M. Gitman, *Phys. Rev. D* **44**, 3230 (1991).
7. D. M. Gitman, S. I. Zlatev and W. D. Cruz, *Braz. J. Phys.* **26**, 419 (1996).
8. D. M. Gitman and S. I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **55**, 7701 (1997).
9. S. Zeggari, T. Boudjedaa and L. Chetouani, *Czech. J. Phys.* **51**, 185 (2001).

10. S. Zeggari, T. Boudjedaa and L. Chetouani, *Phys. Scripta* **64**, 285 (2001).
11. A. Merdaci, A. Jellal and L. Chetouani, *Ann. Phys.* **384**, 116 (2017).
12. A. Merdaci, L. Boudiaf and L. Chetouani, *Z. Naturforsch. A* **63**, 283 (2008).
13. N. Boudiaf, A. Merdaci and L. Chetouani, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 015303 (2009).
14. A. Merdaci, A. Jellal and L. Chetouani, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550174 (2015).
15. S. Haouat and L. Chetouani, *Z. Naturforsch. A* **62**, 34 (2007).
16. R. Rekioua, T. Boudjedaa, *Eur. Phys. J. C* **49**, 1091 (2007).
17. D. Ito, K. Mori and E. Carrieri, *Nuovo Cimento A* **51**, 1119 (1967).
18. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L817 (1989).
19. E. Sadurnı, *AIP Conf. Proc.* **1334**, 249 (2010).
20. J. M. Torres, E. Sadurnı and T. H. Seligman, *AIP Conf. Proc.* **1323**, 301 (2010).
21. M. Hamzavi, M. Eshghi and S. M. Ikhdair, *J. Math. Phys.* **53**, 082101 (2012).
22. C.-K. Lu and I. F. Herbut, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 295003 (2011).
23. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Ann. Phys.* **325**, 2522 (2010).
24. Y. Chargui, A. Trabelsi and L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **374**, 2907 (2010).
25. A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado and A. Luis, *Phys. Rev. A* **77**, 063815 (2008).
26. J. Munarriz, F. Dominguez-Adame and R. P. A. Lima, *Phys. Lett. A* **376**, 3475 (2012).
27. J. Grineviciute and D. Halderson, *Phys. Rev. C* **85**, 054617 (2012).
28. A. Faessler, V. I. Kukulin and M. A. Shikhalev, *Ann. Phys.* **320**, 71 (2005).
29. B. P. Mandal and S. K. Rai, *Phys. Lett. A* **376**, 2467 (2012).
30. G. Melo, M. Montigny, P. Pompeia and E. Santos, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 441 (2013).
31. Z. Y. Luo, Q. Wang, X. Li and J. Jing, *Int. J. Theor. Phys.* **51**, 2143 (2012).
32. R. V. Maluf, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 4991 (2011).
33. A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado and E. Solano, *Phys. Rev. A* **76**, 041801 (2007).
34. A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado and E. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 123602 (2007).
35. A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado and A. Luis, *Phys. Rev. A* **77**, 063815 (2008).
36. Y. Luo, Y. Cui, Z. Long and J. Jing, *Int. J. Theor. Phys.* **50**, 2992 (2011).
37. A. Jellal, A. El. Mouhafid and M. Daoud, *J. Stat. Mech.* **01**, P01021 (2012).
38. J. A. Franco-Villafañe, E. Sadurní, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne and T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 170405 (2013).
39. V. M. Villalba, *Phys. Rev. A* **49**, 586 (1994).
40. C. Quimbay and P. Strange, arXiv:1311. 2021.
41. F. L. Zhang, B. Fu and J.-L. Chen, *Phys. Rev. A* **80**, 054102 (2009).
42. D. Natha and P. Roy, *Ann. Phys.* **351**, 13 (2014).
43. H. P. Laba and V. M. Tkachuk, *Eur. Phys. J. Plus* **133**, 279 (2018).
44. C. Alexandrou, R. Rosenfelder and A. W. Schreiber, *Phys. Rev. A* **59**, 3 (1998).
45. Y. Ohnuki and T. Kashiwa, *Prog. Theor. Phys.* **60**, 548 (1978).
46. N. V. Borisov and P. P. Kulish, *Theor. Math. Phys.* **51**, 535 (1982).
47. S. Houat and L. Chetouani, *Int. J. Theor. Phys.* **46**, 57 (2007).
48. S. Houat and L. Chetouani, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 1349 (2007).
49. T. Boudjedaa, A. Bounames, Kh. Nouicer, L. Chetouani and T. F. Hammann, *J. Math. Phys.* **36**, 1602 (1995); *Phys. Scripta* **54**, 225 (1996); **56**, 545 (1998).
50. M. Aouachria and L. Chetouani, *Eur. Phys. J. C* **25**, 333 (2002).
51. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1979).
52. F. M. Toyama, Y. Nogami and F. A. B. Coutinho, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 2585 (1997).

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical

PAPER

Supersymmetric path integral for the Dirac oscillator in a uniform electric field

To cite this article: Hassene Bada and Mekki Aouachria 2020 *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 265401

IOP Publishing Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical
J. Phys. A: Math. Theor. **53** (2020) 265401 (22pp) https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab8ff1

Supersymmetric path integral for the Dirac oscillator in a uniform electric field

Hassene Bada[1] and **Mekki Aouachria**

Laboratoire de Physique Energétique Appliquée (LPEA), Département de Physique, Faculté des Sciences de la Matière, Université Hadj Lakhdar, Batna 1, Algeria

E-mail: badahacene@yahoo.ca

Received 6 December 2019, revised 7 April 2020
Accepted for publication 4 May 2020
Published 10 June 2020

Abstract

In this paper, we study the interaction between the two-dimensional Dirac oscillator and a uniform electric field via the supersymmetric path integrals method where the fermionic variables that describe the spin degrees of freedom are expressed by odd sources according to the Fradkin and Gitman covariant model. The propagator is calculated exactly and the energy eigenvalues as well as their eigenspinors are deduced. Moreover, by using various symmetry properties of the propagator, we represented it in a way that allowed us to obtain the eigenspinors directly in normalized form. The nonrelativistic limit and the density of current for this problem are also studied.

Keywords: path integral, Green's function, Grassmann variables, supersymmetric model, Dirac oscillator

1. Introduction

Clearly, there are issues still facing the Dirac electron's path integral. These issues are linked to both the spin's discrete nature and the light-velocity invariance in Galilean reference frames. By using the operator formalism as an example, it is not hard to compute that the velocity operator's eigenvalues are equal to $\pm c$. This is due to the fact that the operator of velocity in the Dirac theory turns out to be a purely spin operator which has discrete eigenvalues.

As per the principle of relativistic invariance, if the velocity value of the particle was $\pm c$, then it has no mass ($m = 0$), which is nonetheless not applied to electron physics. Furthermore, classical quantities are used in the Feynman approach [1] such as trajectories, and it is inconceivable to associate a continuous physical entity like trajectory with these discrete eigenvalues.

Hence, it is unclear how to suggest a Dirac electron model that satisfies the relativistic invariance constraints and that represents the spin, which is a purely quantum mechanical

[1]Author to whom any correspondence should be addressed.

phenomenon that comes in discrete units of integer or half-integer multiples of $\hbar$. In fact, many have attempted to combine those requirements, such as Fradkin's [2] supersymmetric model founded on the Grassmann variables and the odd sources, a model that was later re-examined by Berezin and Marinov [3], and then re-picked by Fradkin and Gitman [4].

They were able to straightforwardly construct path integral representations for spinless and spinning particle relativistic propagators. Their formalism essentially consists in formally writing the causal Green function as an operator's inverse and then, by means of an integral over the proper time, conveying this inverse as a regular Schrödinger evolution operator.

For the Klein–Gordon equation, they have used only one time of evolution, called the Schwinger proper time, whereas for the Dirac equation, a super-proper time was used. It consists of proper time made of a bosonic part, which is exactly that of Schwinger's, and a fermionic one, which does the projection of the Klein–Gordon states on the Dirac ones.

This formalism was exploited for calculating the spinor causal Green's function for certain applications where the external field is essentially composed of constant field and a plane wave field [5–16].

Over the last few years various mathematical properties of solutions to the Dirac oscillator eigenproblem have been extensively investigated both analytically and algebraically but is almost never by means of the supersymmetric path integral technique [17–43].

The aim of this work, which is a continuation of our previous paper [44], is to resolve the problem of the Dirac oscillator particle interacting with a uniform electric field via the supersymmetric path integral technique. The latter is essentially based on the use of Grassmann odd sources instead of the spin coherent states to formulate the dynamics of a spin-1/2 system. We adopt the global-named projection [45], which leads to a simpler expression for the supersymmetric fermionic path integral without a Grassmann proper time. Therefore, our search for the Dirac equations propagator is initially focused on determining its quadratic forms propagator. We later obtain the solution of our problem by the acting of the global projection operator. Moreover, by using various symmetry properties of the propagator, it will be represented in a form allowing to obtain the eigenspinors directly in normalized form.

We believe that this is the first work that shows how to resolve the (2 + 1)-dimensional Dirac oscillator in a uniform electric field with the supersymmetric path integral technique. Furthermore, we must point out that, in the calculation of Dirac's particle propagator by means of the supersymmetric path integral technique, with a few rare exceptions, e.g., [11], the wave functions have often been calculated up to a multiplicative factor or normalized by hand using the normalization condition. The method used here allows deriving the wave functions directly normalized from the propagator.

The organization of the work is as follows: in sections 2 and 3, we show how to deal with the (2 + 1)-dimensional Dirac oscillator in an electric field by the means of the global projection method and we obtain a supersymmetric path integral representation for our problem; in sections 4 and 5, we determine the causal Green's function, and obtain the normalized eigenspinors and the energies. In section 6, we study the nonrelativistic limit and deduce the eigenfunctions and energies in this case. In section 7, we calculate the density of current. We conclude our findings in the last section.

2. Global projection

As it is known, the Dirac propagator in (2 + 1)-dimensions is the causal Green function $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ of the Dirac equation ($c = \hbar = 1$)

$$\left(\gamma^\mu \left(\mathrm{i}\partial_{b\mu} - eA_\mu(\mathbf{x}_b)\right) - m)S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a\right) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{1}$$

where e is the charge of the particle, $\mathbf{x} \equiv (t, x, y)$ and the index c stands for causal. The γ-matrices are defined by the relations generating Clifford algebra

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] = -2\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}, \tag{2}$$

where the metric $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1)$, the spin tensor $\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$ and $\mu, \nu = 0, 1, 2$.

Since we work in $(2 + 1)$-dimensions where there are two non-equivalent representations for γ-matrices, we will then write them as follows:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = \mathrm{i}\sigma_2, \quad \gamma^2 = -\mathrm{i}\sigma_1\varsigma, \quad \varsigma = \pm 1, \tag{3}$$

where the σ_{i} are the Pauli matrices and ς the polarisation. By following the usual procedure [11], we consider $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ as a matrix element of operator S^c,

$$S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b | S^c | \mathbf{x}_a \rangle, \tag{4}$$

with

$$S^c = -\left(\gamma^{\mu}\left(\mathrm{i}\partial_{\mu} - eA_{\mu}\right) - m\right)^{-1}. \tag{5}$$

Using (5), the operator S^c is derived as

$$S^c = -O_-^{-1} = -O_+\left(O_-O_+\right)^{-1} = -O_+\left(O_+O_-\right)^{-1}, \tag{6}$$

where O_- and O_+ are referred to as Dirac operator and the global projection operator respectively,

$$O_{\pm} = \gamma^{\mu}\left(p_{\mu} - eA_{\mu}\right) \pm m. \tag{7}$$

Now the global representation for $S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ can be achieved by taking into account (5) and introduce the completeness relation $\int |z\rangle\,\langle z|\, d^3z = 1$ between O_+ and $\left(O_-O_+\right)^{-1}$ in (4) to obtain

$$S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \left(\gamma^{\mu}\left(\mathrm{i}\partial_{b\mu} - eA_{\mu}\right) + m\right) S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a), \tag{8}$$

where $S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ is presently the Green's function to be determined in the framework of the path integral representation, with

$$S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \langle \mathbf{x}_b | -\left(O_-O_+\right)^{-1} | \mathbf{x}_a \rangle = \langle \mathbf{x}_b | -\left(O_+O_-\right)^{-1} | \mathbf{x}_a \rangle\,. \tag{9}$$

Here the index g stands for global. In (8), the action of O_+ discard the non-physics states arising from the application of $\left(O_-O_+\right)^{-1}$.

According to (1) and (8), it is easy to see that $S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$ verifies the equation

$$\mathcal{H} S^c_g(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\delta^3(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a), \tag{10}$$

where $\mathcal{H}$, the quadratic Dirac Hamiltonian, has the form

$$\mathcal{H} = O_-O_+ = O_+O_-. \tag{11}$$

We will now examine the $(2 + 1)$-dimensional Dirac oscillator in a uniform electric field defined by the 3-potential

$$A_0 = -Ex, \quad A_x = 0, \quad A_y = 0. \tag{12}$$

The Dirac oscillator in the x direction is built by using the non-minimal substitution as follows,

$$\hat{p}_x \to \hat{p}_x - \mathrm{i}m\omega\hat{x}\gamma^0, \tag{13}$$

$$\hat{p}_y \to \hat{p}_y, \tag{14}$$

where ω is the oscillator frequency. The substitution of (13) into (7) give

$$O_- = \sigma_3\left(\hat{p}_0 + eE\hat{x}\right) - \mathrm{i}\sigma_2\hat{p}_x + \mathrm{i}\sigma_1\left(\varsigma\hat{p}_y - m\omega\hat{x}\right) - m, \tag{15}$$

$$O_+ = \sigma_3\left(\hat{p}_0 + eE\hat{x}\right) - \mathrm{i}\sigma_2\hat{p}_x + \mathrm{i}\sigma_1\left(\varsigma\hat{p}_y - m\omega\hat{x}\right) + m. \tag{16}$$

This yields the expression for the Hamiltonian $\mathcal{H}$ of the quadratic Dirac equation

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = O_-O_+ &= \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - \left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)\hat{x}^2 \\ &+2\varsigma m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0E\hat{x} - m^2 - \mathrm{i}eE\sigma_1 + m\omega\sigma_3\end{aligned} \tag{17}$$

We note that $\mathcal{H}$ is dependent of the parameter ς.

3. Supersymmetric path-integral formulation

Taking into account (3) and the properties of Pauli matrices we get the following identities

$$\gamma^0 = i\varsigma\gamma^1\gamma^2, \quad \gamma^1 = i\varsigma\gamma^0\gamma^2, \quad \gamma^2 = -i\varsigma\gamma^0\gamma^1. \tag{18}$$

Substituting (18) into (17), the Hamiltonian $\mathcal{H}$ can be rearranged as follows:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = O_-O_+ &= \hat{p}_0^2 - \hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2 - \left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)\hat{x}^2 \\ &+2\varsigma m\omega\hat{x}\hat{p}_y + 2e\hat{p}_0E\hat{x} - m^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu,\end{aligned} \tag{19}$$

where F is an antisymmetric tensor defined as follows:

$$F_{01} = -F_{10} = eE, \quad F_{12} = -F_{21} = -m\omega, \tag{20}$$

and all other elements are vanishing. In this case, F has to be understood as a matrix with lines marked by the first contravariant indices and with columns marked by the second covariant indices.

Now, by using Schwinger proper time representation, we can express $S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ in terms of the integral

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{-\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\langle\mathbf{x}_b|\exp\left(\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\mathcal{H}\right)|\mathbf{x}_a\rangle, \tag{21}$$

As usually done, to move to the path-integral representation, we discretize the time interval into $N+1$ intermediate moments $\epsilon = \frac{1}{N+1}$ each and we write $\exp(\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\mathcal{H}) = \left[\exp(\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\mathcal{H})\varepsilon\right]^{N+1}$. Thus, by introducing N times the resolution of the identity $\int|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|d^3\mathbf{x} = 1$ between all the operators $\exp(\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\mathcal{H}\varepsilon)$ and $(N+1)$ additional integrations $\int \mathrm{d}\lambda_k\delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) = 1$ over λ, the expression of $S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ take the following path integral form:

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{-\mathrm{i}}{2} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} \mathrm{d}\lambda_k \prod_{k=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{x}_k \times \prod_{k=1}^{N+1} \langle \mathbf{x}_k | \exp\left(\frac{\mathrm{i}\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon\right) | \mathbf{x}_{k-1}\rangle \delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right), \tag{22}$$

where $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_b$ and λ is renominated λ_0.

Expanding, as usual, the matrix elements of $\exp(\frac{\mathrm{i}\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon)$ to the first order in ε

$$\langle \mathbf{x}_k | \exp\left(\frac{\mathrm{i}\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon\right) | \mathbf{x}_{k-1}\rangle \approx \langle \mathbf{x}_k | 1 + \frac{\mathrm{i}\lambda_k}{2}\mathcal{H}\varepsilon\, | \mathbf{x}_{k-1}\rangle \tag{23}$$

and then inserting $(N+1)$ times the identity $\int |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\, d^3\mathbf{p} = 1$ with $\langle \mathbf{x}_k | \mathbf{p}_{k'}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}_{k'}\mathbf{x}_k}$, the Green's function is written, using the mid-point prescription, as

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{-\mathrm{i}}{2} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} \mathrm{d}\lambda_k \prod_{k=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{x}_k \prod_{k=1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3} \times \prod_{k=1}^{N+1} \delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) \exp i \left(\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon} + \frac{\lambda_k}{2}\mathcal{H}\left(\overline{\mathbf{x}}_k, \mathbf{p}_k\right)\right)\varepsilon. \tag{24}$$

Using the following integral representations for $\delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right)$ in the right hand side of (24)

$$\delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\pi_k\, \exp \mathrm{i}\pi_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \tag{25}$$

we obtain

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \frac{-\mathrm{i}}{2} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda_0 \int \prod_{k=1}^{N+1} \mathrm{d}\lambda_k \prod_{k=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{x}_k \prod_{k=1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3} \prod_{k=1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}\pi_k}{(2\pi)} \times \prod_{k=1}^{N+1} \exp\left[\mathrm{i}\left(\mathbf{p}_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon} + \pi_k \frac{(\lambda_k - \lambda_{k-1})}{\varepsilon} + \frac{\lambda_k}{2}\mathcal{H}\left(\overline{\mathbf{x}}_k, \mathbf{p}_k\right)\right)\varepsilon\right]. \tag{26}$$

As in [4], then we formally attribute the index k, to the γ-matrices, involved in (26), and at the same time we attribute the 'time' τ_k to al quantities, according to the index k they have, $\tau_k = k\Delta\tau$, so that $\tau \in [0, 1]$.

It becomes possible at this step to introduce the $\mathcal{T}$-product and gather all the multipliers of (26) in one exponent to get the following expression for Green's function $S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$

$$S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{T}\int_0^\infty d\lambda_0 \int \mathrm{D}\lambda \int \mathrm{D}t\mathrm{D}p_0 \int \mathrm{D}x\mathrm{D}p_x \int \mathrm{D}y\mathrm{D}p_y \int \mathrm{D}\pi \times \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1 \left[-p_0\dot{t} + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + \frac{1}{2}\lambda p_0^2 - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda p_y^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2 - \frac{\lambda}{2}m^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda eEp_0x - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu + \pi\dot{\lambda}\right]\mathrm{d}\tau\right\}, \tag{27}$$

where $\mathbf{x} =(t, x, y)$ and λ satisfies the boundary conditions

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_b, \quad \lambda(0) = \lambda_0. \tag{28}$$

The derivative with respect to τ in (27) are denoted by an above dot and the ordering operator $\mathcal{T}$ acts on the noncommuting γ-matrices, which are supposed formally to be depending on the time parameter τ, and allows us to deal with them similarly as Grassmann variables.

By means of the source technique (27) can be transformed as follows:

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = &-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda_0 \int \mathrm{D}\lambda \int \mathrm{D}t\mathrm{D}p_0 \int \mathrm{D}x\mathrm{D}p_x \int \mathrm{D}y\mathrm{D}p_y \int \mathrm{D}\pi \\ &\times \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1 \left[-p_0\dot{t} + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + \frac{1}{2}\lambda p_0^2 - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda p_y^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2 \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\lambda}{2}m^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda eEp_0x - \frac{\mathrm{i}\lambda}{4}F_{\mu\nu}\frac{\delta_l}{\delta\rho_\mu}\frac{\delta_l}{\delta\rho_\nu} + \pi\dot{\lambda}\right]\mathrm{d}\tau\right\} \\ &\times \mathcal{T}\exp\int_0^1 \rho_n\gamma^n \mathrm{d}\tau\bigg|_{\rho_n=0}, \end{aligned} \tag{29}$$

where $\rho_n(\tau), n = 0, 1, 2$, are three Grassmann odd sources and $\frac{\delta_l}{\delta\rho_\mu}$ denotes left derivatives. They anticommute with the γ-matrices by definition.

We now express $\mathcal{T}\exp\int_0^1 \rho_n\gamma^n\mathrm{d}\tau$ by a path integral over grassmannian odd trajectories via the following functional formula [4, 43]:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\exp\int_0^1 \rho_n\gamma^n\mathrm{d}\tau = &\exp\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta}\mathcal{D}\Psi \\ &\times \exp\left\{\int_0^1\left[\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu - 2\mathrm{i}\rho_\mu\Psi^\mu\right]\mathrm{d}\tau + \Psi_\mu(1)\Psi^\mu(0)\right\}\bigg|_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{30}$$

where $\mathcal{D}\Psi$ is given by

$$\mathcal{D}\Psi = D\Psi\left[\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=0}\exp\left\{\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu\mathrm{d}\tau\right\}D\Psi\right]^{-1} \tag{31}$$

and θ^μ are Grassmann odd variables, anticommuting with γ-matrices, and $\Psi^\mu(\tau)$ are Grassmann odd trajectories of integration anticommuting with γ-matrices and obeying the boundary conditions

$$\Psi(0) + \Psi(1) = 0, \tag{32}$$

which are indicated below the integration signs. Substituting (30) in (29) and taking into account the relation (31) and (32) we get the Hamiltonian path integral representation for the Green function in question:

$$\begin{aligned} S_g^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = &-\frac{\mathrm{i}}{2}\exp\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda_0 \int \mathrm{D}\lambda \int \mathrm{D}t\mathrm{D}p_0 \int \mathrm{D}x\mathrm{D}p_x \int \mathrm{D}y\mathrm{D}p_y \int \mathrm{D}\pi \\ &\times \int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta}\mathcal{D}\Psi\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1\left[-p_0\dot{t} + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + \frac{1}{2}\lambda p_0^2 - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda p_y^2\right.\right. \\ &- \frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2 - \frac{\lambda}{2}m^2 + \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda eEp_0x - \mathrm{i}\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu \\ &\left.\left. + \mathrm{i}\lambda F_{\mu\nu}\Psi^\mu\Psi^\nu + \pi\dot{\lambda}\right]\mathrm{d}\tau + \Psi_\mu(1)\Psi^\mu(0)\right\}\bigg|_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{33}$$

4. Calculation of the propagator

Having shown how to formulate the problem of the (2 + 1)-dimensional Dirac oscillator in a uniform electric field in the framework of covariant supersymmetric path integrals, we now go to the calculation of Green's function S_g^c when $m^2\omega^2 > e^2E^2$.

Integrating over the paths π, λ, t and y, we can see that the momenta become constants of motion.

$$p_0\left(\lambda\right) = p_0 = \text{const}, \quad p_y\left(\lambda\right) = p_y = \text{const}, \tag{34}$$

and the propagator takes the form

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} G_{\mathrm{E}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \lambda)\mathcal{F}\lambda, \tag{35}$$

where $\mathcal{F}\lambda$ and $G_{\mathrm{E}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \lambda)$ represent the fermionic and bosonic part respectively,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\lambda\right) = &\exp\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial_l}{\partial\theta^{\mu}}\right)\int_{\Psi(0)+\Psi(1)=\theta}\mathcal{D}\Psi \\ &\times \exp\left\{\int_0^1\left[\Psi_{\mu}\dot{\Psi}^{\mu} - \lambda F_{\mu\nu}\Psi^{\mu}\Psi^{\nu}\right]\mathrm{d}\tau + \Psi_{\mu}\left(1\right)\Psi^{\mu}\left(0\right)\right\}\Big|_{\theta=0},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{E}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \lambda) = &\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\exp\mathrm{i}\left[-p_0\left(t_b - t_a\right) + p_y\left(y_b - y_a\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right)\right] \\ &\times \int \mathrm{D}x\mathrm{D}p_x\ \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^1\left[p_x\dot{x} - \frac{1}{2}\lambda p_x^2 - \frac{1}{2}\lambda\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)x^2\right.\right. \\ &\left.\left. +\ \lambda\varsigma m\omega x p_y + \lambda e E p_0 x\right]\mathrm{d}\tau\right\}\end{aligned} \tag{37}$$

In order to calculate $\mathcal{F}(\lambda)$ we change, in the first stage, the integration variables from Ψ to ξ, where

$$\Psi^{\mu} = \frac{1}{2}\xi^{\mu} + \frac{1}{2}\theta^{\mu}, \tag{38}$$

and we consider (32) to get the new boundary condition

$$\xi^{\mu}(0) + \xi^{\mu}(1) = 0. \tag{39}$$

Taking into account (38) and (39) yields the relations

$$\Psi_{\mu}\left(1\right)\Psi^{\mu}\left(0\right) = \frac{1}{2}\theta^{\mu}\left(0\right)\xi_{\mu}\left(0\right), \tag{40}$$

$$\int_0^1\left(\Psi_{\mu}\dot{\Psi}^{\mu}\right)\mathrm{d}\tau = \int_0^1\left(\frac{1}{4}\xi_{\mu}\dot{\xi}^{\mu}\right)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\theta_{\mu}\left(0\right)\xi^{\mu}\left(0\right), \tag{41}$$

and

$$\int_0^1\left[-4\lambda F_{\mu\nu}\Psi^{\mu}\Psi^{\nu}\right]\mathrm{d}\tau = -\lambda F_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu} - \int_0^1\lambda F_{\mu\nu}\left(\xi^{\mu}\xi^{\nu} + 2\theta^{\mu}\xi^{\nu}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{42}$$

Thanks to the previous identities (40), (41) and (42) we obtain

$$\mathcal{F}(\lambda) = \exp\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial_l}{\partial\theta^{\mu}}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{4}F_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\right)\int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta}\mathcal{D}\xi\ \exp$$
$$\times\ \left\{\int_0^1\left[\frac{1}{4}\xi_{\mu}\dot{\xi}^{\mu}-\frac{\lambda}{4}F_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}-\frac{\lambda}{2}F_{\mu\nu}\theta^{\mu}\xi^{\nu}\right]\mathrm{d}\tau\right\}\bigg|_{\theta=0}. \tag{43}$$

According to [5, 6] we can calculate

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sqrt{\det(\cosh\frac{\lambda F}{2})}\exp\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial_l}{\partial\theta^{\mu}}\right)\ \left[1-\frac{\lambda}{2}B_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\right]\bigg|_{\theta=0}, \tag{44}$$

where

$$B = \frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\lambda F}{2} \tag{45}$$

corresponds to the matrix $B_{\mu\nu} = B^{\mu}{}_{\nu}$.

To evaluate $\mathcal{F}\lambda$ we start by finding $\det(\cosh\frac{\lambda F}{2})$ and B.

Since $\frac{\lambda F}{2}$ is antisymmetric it has eigenvalues $0, \varphi$ and $-\varphi$ where

$$\varphi^2 = \frac{\mathrm{tr}\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2}{2}, \tag{46}$$

and it is suqart $\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2$ is proportional to a projection operator P onto some two-dimensional subspace as follows:

$$\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2 = \varphi^2 P, \quad P^2 = P, \quad \mathrm{tr}P = 2, \quad P\frac{\lambda F}{2} = \frac{\lambda F}{2}P = \frac{\lambda F}{2} \tag{47}$$

According to (20) we have

$$\left(\frac{\lambda F}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4}\begin{pmatrix} e^2E^2 & 0 & eEm\omega \\ 0 & e^2E^2-m^2\omega^2 & 0 \\ -eEm\omega & 0 & -m^2\omega^2\end{pmatrix}, \tag{48}$$

which allows one to find

$$\varphi = \frac{\mathrm{i}\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2} \tag{49}$$

and

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{e^2E^2}{e^2E^2-m^2\omega^2} & 0 & \dfrac{eEm\omega}{e^2E^2-m^2\omega^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-eEm\omega}{e^2E^2-m^2\omega^2} & 0 & \dfrac{-m^2\omega^2}{e^2E^2-m^2\omega^2}\end{pmatrix} \tag{50}$$

Since for an even function h

$$h\left(\frac{\lambda F}{2}\right) = h(0)(1-P)+h(\varphi)P, \tag{51}$$

so

$$\cosh\frac{\lambda F}{2}=1-\left(1-\cos\left(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}\right)\right)P. \tag{52}$$

Substituting (50) into (52), we find

$$\cosh\frac{\lambda F}{2}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{Ke^2E^2}{m^2\omega^2-e^2E^2} & 0 & \dfrac{KeEm\omega}{m^2\omega^2-e^2E^2}\\ 0 & 1-K & 0\\ \dfrac{-KeEm\omega}{m^2\omega^2-e^2E^2} & 0 & 1-\dfrac{Km^2\omega^2}{m^2\omega^2-e^2E^2}\end{pmatrix}, \tag{53}$$

where

$$K=\left(1-\cos\left(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}\right)\right) \tag{54}$$

Using (53), we get after long but straightforward calculations

$$\sqrt{\det\left(\cosh\frac{\lambda F}{2}\right)}=1-K=\cos(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}). \tag{55}$$

We know that for an odd function g

$$g\left(\frac{\lambda F}{2}\right)=\frac{\frac{\lambda F}{2}}{\varphi}g\left(\varphi\right). \tag{56}$$

Using (56) transforms (45) into the equivalent identity

$$B=\frac{F}{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}\tan\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2} \tag{57}$$

To explicitly determine the matrix $\mathcal{F}\lambda$ we use the identities

$$\exp\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)f\left(\theta\right)\bigg|_{\theta=0}=f\left(\frac{\partial_l}{\partial\zeta}\right)\exp\left(\mathrm{i}\zeta_\mu\gamma^\mu\right)\bigg|_{\zeta=0} \tag{58}$$

and

$$\exp\left(\mathrm{i}\zeta_\mu\gamma^\mu\right)=1+\mathrm{i}\zeta_\mu\gamma^\mu+\frac{1}{2}\zeta_\mu\zeta_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu+\mathrm{i}\zeta_0\zeta_1\zeta_2\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \tag{59}$$

where ζ_μ are odd variables. We get in this case

$$\exp\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial_l}{\partial\theta^\mu}\right)\left[1-\frac{\lambda}{2}B_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right]|_{\theta=0}=1-\frac{\tan\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}\left[eE\gamma^1\gamma^0-m\omega\gamma^2\gamma^1\right] \tag{60}$$

By substituting(55) and (60) into (44) we obtain

$$\mathcal{F}\left(\lambda\right)=\cos\left(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}\right)-\frac{\sin\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}}{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}\left[eE\gamma^1\gamma^0-m\omega\gamma^2\gamma^1\right] \tag{61}$$

Using (18) allows one to write (61) in the form

$$\mathcal{F}(\lambda) = \cos\left(\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}\ \sin\frac{\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - m^2E^2}}{2}}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\left[eE\gamma^2 + m\omega\gamma^0\right] \quad (62)$$

which we can easily rewrite as follows:

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sum_{s=\pm 1}\frac{1}{2}\left[1 + s\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}} + \frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\right)\right]\exp\frac{\mathrm{i}\lambda s\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2}. \quad (63)$$

By performing the following changes

$$\cosh\ \alpha = \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}, \quad \sinh\ \alpha = \frac{eE}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}, \quad (64)$$

we can prove after some calculations that

$$\frac{1}{2}\left[1 + s\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}} + \frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{1 + s\ \cosh(\alpha)}{2} & \frac{-\mathrm{i}s\ \sinh\ \alpha}{2} \\ \frac{-\mathrm{i}s\ \sinh\ \alpha}{2} & \frac{1 - s\ \cosh(\alpha)}{2} \end{pmatrix} \quad (65)$$

Taking into account the proprieties of the hyperbolic functions and that

$$\exp(x\sigma_{\mathrm{i}}) = \cosh\ x + \sigma_{\mathrm{i}}\ \sinh\ x, \quad (66)$$

we get the following identities

$$\begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\mathrm{i}\ \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_1, \quad (67)$$

$$\left(\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{i}\ \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \chi_1^+\ \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right), \quad (68)$$

$$-\begin{pmatrix} \mathrm{i}\ \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} = -\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_{-1}, \quad (69)$$

$$\left(-\mathrm{i}\ \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = -\chi_{-1}^+\ \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \quad (70)$$

Using the relations (67) to (70) allows one to rewrite (65) as follows:

$$\frac{1}{2}\left[1 + s\left(\frac{eE\gamma^2}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}} + \frac{m\omega\gamma^0}{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}\right)\right] = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^\dagger\ \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \quad (71)$$

Substituting (71) into (63) leads to the following result:

$$\mathcal{F}(\lambda) = \sum_{s=\pm 1} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\chi_s\chi_s^\dagger \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \times \exp\frac{\mathrm{i}\lambda s\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2} \tag{72}$$

where $\chi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+s & 1-s\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Having succeeded to do integration over Grassmannian variables, let us now integrate over even (bosonic) trajectories.

The equation (37) becomes what follows after taking the Gaussian integral over p_x and completing the square.

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{E}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \lambda) = &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi} \exp\mathrm{i}\left[-p_0(t_b - t_a) + p_y(y_b - y_a) + \frac{1}{2}\lambda\left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(\varsigma m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right] K^{\mathrm{os}}(x_a, x_b; \lambda), \end{aligned} \tag{73}$$

where K^{os} is the propagator related to the paths $x(\tau)$ and expresses the motion of a particle subjected to harmonic oscillations with a mass $\frac{1}{\lambda}$ and a frequency $\Omega = \lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}$, which is

$$K^{\mathrm{os}}(x_a, x_b; \lambda) = \int Dx \exp\mathrm{i}\int_0^1 \left(\frac{1}{2\lambda}\dot{x}^2 - \frac{1}{2\lambda}\Omega^2\left(x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)^2\right)\mathrm{d}\tau. \tag{74}$$

The integral over the paths $x(\tau)$ is well-known [46] and equals

$$\begin{aligned} K^{\mathrm{os}}(x_a, x_b; \lambda) = &\left(\frac{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}}{2\mathrm{i}\pi\,\sin\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)}\right)^{1/2} \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right. \\ &\left.\times\frac{\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)\cos\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right) - 2\tilde{x}_b\tilde{x}_a}{2\,\sin\left(\lambda\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\right)}\right), \end{aligned} \tag{75}$$

where

$$\tilde{x} = x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eEp_0}{m^2\omega^2 - e^2E^2}. \tag{76}$$

The propagator K^{os} can be expressed by using its known expression, namely, its spectral decomposition [47], as follows:

$$\begin{aligned} K^{\mathrm{os}} = &\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}/\pi}}{2^n n!}\mathrm{e}^{-\imath\lambda\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}}{2}\left(\tilde{x}_b^2+\tilde{x}_a^2\right)}\right. \\ &\left.\times H_n\left(\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\left(m^2\omega^2 - e^2E^2\right)^{\frac{1}{4}}\tilde{x}_a\right)\right], \end{aligned} \tag{77}$$

where H_n is the Hermite polynomial.

The equation (73) in this case becomes

$$G_{\mathrm{E}}(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi} \exp \mathrm{i} \left[-p_0 (t_b - t_a) + p_y (y_b - y_a) + \frac{1}{2}\lambda \left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda \frac{\left(\varsigma m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\omega^2 - e^2E^2} \right] \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda m\tilde{\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2^n n!} \mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)} \times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right) \right], \tag{78}$$

where

$$\tilde{\omega} = \omega\sqrt{1 - \frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}. \tag{79}$$

Substituting (72) and (78) into (35), our propagator takes the form

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \eta_b, \mathbf{x}_a, \eta_a) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi} \exp \mathrm{i} \left[-p_0 (t_b - t_a) + p_y (y_b - y_a) + \frac{1}{2}\lambda \left(p_0^2 - p_y^2 - m^2\right) + \frac{1}{2}\lambda \frac{\left(\varsigma m\omega p_y + eEp_0\right)^2}{m^2\tilde{\omega}^2} \right] \sum_{s=\pm 1} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \chi_s \chi_s^\dagger \times \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \times \exp \frac{\mathrm{i}\lambda s m\tilde{\omega}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda m\tilde{\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2^n n!} \mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)} \times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right) \right] \tag{80}$$

An integration over λ at this step gives the expression

$$S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0(t_b - t_a) + \mathrm{i}p_y(y_b - y_a)} \sum_{s=\pm 1} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \chi_s \chi_s^\dagger \times \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)}}{2^n n!} \frac{H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_b\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_a\right)}{\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2}\left[\left(p_0 + \frac{e\varsigma p_y E}{m\omega}\right)^2 - E_{n,s}^2\right]} \right], \tag{81}$$

which has the poles

$$p_0 = \pm E_{n,s} - \frac{e\varsigma E}{m\omega}p_y = \pm\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\sqrt{m^2 + 2m\tilde{\omega}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)} - \frac{e\varsigma E}{m\omega}p_y, \tag{82}$$

where

$$E_{n,s} = \sqrt{1 - \frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)} \tag{83}$$

As in [12], the application of the residue theorem at pole p_0 allows one to write

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(p_0\right) \frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0 T}}{p_0^2 - E_{n,s}^2} = -\mathrm{i} \sum_{\epsilon=\pm 1} f\left(\epsilon E_{n,s}\right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\epsilon E_{n,s}\left(t_b - t_a\right)}}{2E_{n,s}} \Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right), \tag{84}$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside function. This leads to the following expression:

$$\begin{aligned} S_g^c\left(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a\right) = \mathrm{i} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{+\infty} & \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta_{p_y,n,s}^{\epsilon}\left(t_b - t_a\right) + \mathrm{i}p_y\left(y_b - y_a\right)} \Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right) \right. \\ & \times \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \chi_s \chi_s^{\dagger} \exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right) \frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\,\tilde{\omega}}{2^n n! 2\omega \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)}} \\ & \left. \times\, \mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)} H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{b,p_y,n}^{\epsilon,s}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{a,p_y,n}^{\epsilon,s}\right) \right\}, \end{aligned} \tag{85}$$

where

$$\zeta_{p_y,n}^{\epsilon,s} = \epsilon \sqrt{1 - \frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}} \sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)} - \frac{e\varsigma E}{m\omega} p_y, \tag{86}$$

$$\tilde{x}_{p_y,n}^{\epsilon,s} = x - \frac{\varsigma m\omega p_y + eE\zeta_{p_y,n}^{\epsilon,s}}{m^2\omega^2 - e^2E^2} \quad \text{and} \quad \epsilon = \pm 1 \tag{87}$$

In the next section, we give an exact solution for our problem by using various symmetry properties of the propagator to calculate the normalized eigenspinors and the correspondent energy spectrum.

5. Eigenspinors and energy spectrum

Now we extract the normalized states for our problem by applying the global projection operator O_+ on $S_g^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a)$. The substitution of (85) into (8) yields

$$\begin{aligned} S^c(\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a) = \mathrm{i} & \left[\sigma_3\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_b} + eEx_b\right) - \sigma_2\frac{\partial}{\partial x_b} + \mathrm{i}\sigma_1\left(\frac{\partial}{\mathrm{i}\partial y_b} - m\omega x_b\right) + m\right] \\ & \times \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi} \Theta\left(\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right) \frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!} \right. \\ & \times\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta_{p_y,n}^{\epsilon,s}\left(t_b - t_a\right) + \mathrm{i}p_y\left(y_b - y_a\right)} \frac{\tilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2 + 2\sqrt{m^2\omega^2 - e^2E^2}\left(n + \frac{1-s}{2}\right)}} \\ & \left. \times\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_s\chi_s^{+}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}_b^2 + \tilde{x}_a^2\right)} H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{b,p_y,n}^{\epsilon,s}\right) H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}_{a,p_y,n}^{\epsilon,s}\right). \right\} \end{aligned} \tag{88}$$

We can rewrite (88) without parameter ϵ in the following way

$$
\begin{aligned}
S^{c}(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \mathrm{i}\left[\sigma_3\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_b}+eEx_b\right)-\sigma_2\frac{\partial}{\partial x_b}+\mathrm{i}\sigma_1\left(\frac{\partial}{\mathrm{i}\partial y_b}-m\omega x_b\right)+m\right]\\
\times \sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\frac{\widetilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}\\
\times\Bigg\{\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta^{s,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+\mathrm{i}p_y(y_b-y_a)}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_{\mathrm{s}}\chi_{\mathrm{s}}^{+}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)^2+\left(\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)}\\
\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)+\Theta\left(-s\left(t_b-t_a\right)\right)\\
\times\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta^{-s,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+\mathrm{i}p_y(y_b-y_a)}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\chi_{\mathrm{s}}\chi_{\mathrm{s}}^{+}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)^2+\left(\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)}\\
\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

The easily verifiable identities

$$
\begin{gathered}
\sigma_1\chi_{\mathrm{s}}=\chi_{-\mathrm{s}},\quad \sigma_2\chi_{\mathrm{s}}=\mathrm{i}s\chi_{-\mathrm{s}},\quad \sigma_3\chi_{\mathrm{s}}=s\chi_{\mathrm{s}},\\
\sigma_1\mathrm{e}^{A\sigma_2}=-\mathrm{e}^{A\sigma_2}\sigma_1,\quad \sigma_3\mathrm{e}^{A\sigma_2}=-\mathrm{e}^{A\sigma_2}\sigma_3,
\end{gathered}
\tag{90}
$$

as well as the will known Hermite polynomials recurrence relations listed below, will be taken into account in the next steps to determine the causal Green's function.

$$
\begin{gathered}
H_{n+1}\left(t\right)-2tH_n\left(t\right)+\frac{\mathrm{d}H_n\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=0,\quad n\in\mathbb{N}.\\
\frac{\mathrm{d}H_n\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=2nH_{n-1}\left(t\right),\quad n\in\mathbb{N}^{*}.
\end{gathered}
\tag{91}
$$

After a lengthy, but straightforward, calculation the action of the global projector O^{+} yields the result below.

$$
\begin{aligned}
S^{c}(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = \mathrm{i}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\frac{\widetilde{\omega}\ \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}\\
\times\ \Bigg\{\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta^{s,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+\mathrm{i}p_y(y_b-y_a)}\left[\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)\right.\\
\times\ H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)\chi_s\chi_s^{+}+\left(\mathrm{i}\frac{(s-1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n+1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)\right.\\
\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)-\mathrm{i}(1+s)n\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)\\
\times\left.\left. H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)\right)\chi_{-\mathrm{s}}\chi_{\mathrm{s}}^{+}\right]\mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\right)^2+\left(\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)}+\Theta\left(-s\left(t_b-t_a\right)\right)\\
\times\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta^{-s,s}_{p_y,n}(t_b-t_a)+\mathrm{i}p_y(y_b-y_a)}\left[\left(\frac{-\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$\times\ H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)\chi_{\rm s}\chi^+_{\rm s}+\left(\mathrm{i}\frac{(s-1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n+1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)\right.$$
$$\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)-\mathrm{i}(1+s)n\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-1}\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)$$
$$\left.\left.\times H_n\left(\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)\right)\chi_{-\rm s}\chi^+_{\rm s}\right]\mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\left(\tilde{x}^{-s,s}_{b,p_y,n}\right)^2+\left(\tilde{x}^{-s,s}_{a,p_y,n}\right)^2\right)}\Bigg\}\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right). \tag{92}$$

As in [11], to unify the expression of the energies for S^c we perform the following mapping into the terms in (92) which are multiplied by $\Theta\left(-s\left(t_b-t_a\right)\right)$.

$$\begin{aligned} s &\to s'=-s,\\ n &\to n'=n-s. \end{aligned} \tag{93}$$

One can easily check that the previous transformation map $E_{n,s}$ and $\zeta^{-s,s}_{p_y,n}$ onto $E_{n',s'}$ and $\zeta^{s',s'}_{p_y,n'}$, respectively. After that, we replace the dummy indexes s' by s and n' by n to get the following equivalent relation of the causal Green's function.

$$S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)=\mathrm{i}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)\frac{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}{2^n n!}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^s_{p_y,n}(t_b-t_a)+\mathrm{i}p_y(y_b-y_a)}$$
$$\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(X_b^2+X_a^2\right)}\frac{\tilde{\omega}}{2\omega\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-\mathrm{e}^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)$$
$$\times\ \left\{\left[\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)H_n\left(X_b\right)H_n\left(X_a\right)\right]\chi_{\rm s}\chi^+_{\rm s}+\mathrm{i}\left[\frac{(s-1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n+1}\left(X_b\right)\right.\right.$$
$$\left.\times\ H_n\left(X_a\right)-(1+s)n\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-1}\left(X_b\right)H_n\left(X_a\right)\right]\chi_{-\rm s}\chi^+_{\rm s}+\frac{2^s n!\left(n-s+1\right)}{(n-s+1)!}$$
$$\times\ \left[\left(\frac{-\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)H_{n-s}\left(X_b\right)H_{n-s}\left(X_a\right)\right]\chi_{-\rm s}\chi^+_{-\rm s}-\mathrm{i}\frac{2^s n!\left(n-s+1\right)}{(n-s+1)!}$$
$$\times\ \left[\frac{(s+1)}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-s+1}\left(X_b\right)H_{n-s}\left(X_a\right)+(1-s)\left(n-s\right)\sqrt{m\tilde{\omega}}H_{n-s-1}\left(X_b\right)\right.$$
$$\left.\left.\times\ H_{n-s}\left(X_a\right)\right]\chi_{\rm s}\chi^+_{-\rm s}\right\}\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right), \tag{94}$$

where

$$\mathcal{E}^s_{p_y,n}=\zeta^{s,s}_{p_y,n},\quad X_b=\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{b,p_y,n}\quad\text{and}\quad X_a=\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{x}^{s,s}_{a,p_y,n}. \tag{95}$$

To go even farther in this approach, we will use the following identity obtained from (83) by direct calculations.

$$\sqrt{m\tilde{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{(2n+1-s)}}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m\right)}. \tag{96}$$

By taking into account (96) we can rewrite the causal Green's function as follows:

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = {} & \mathrm{i}\sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^s_{p_y,n}\left(t_b-t_a\right)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y\left(y_b-y_a\right)} \\
& \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(X_b^2+X_a^2\right)}\frac{\widetilde{\omega}^2}{\omega^2}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right)\right] \\
& \times\left[\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!E_{n,s}}}H_n\left(X_b\right)\chi_{\mathrm{s}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\left(n-s+1\right)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)!E_{n,s}}}H_{n-s}\left(X_b\right)\chi_{-\mathrm{s}}\right] \\
& \times\left[\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!E_{n,s}}}H_n\left(X_a\right)\chi_{\mathrm{s}}^{+}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\left(n-s+1\right)\left(\frac{\omega}{\widetilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)!E_{n,s}}}H_{n-s}\left(X_a\right)\chi_{-\mathrm{s}}^{+}\right] \\
& \times\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sigma_2\right).
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Finally, considering (90) we obtain from (97) the following expression for the causal Green's function where there are two types of propagation, one with positive energy $\mathcal{E}^{+}_{p_y,n}$ propagation and the other with negative energy $\mathcal{E}^{-}_{p_y,n}$ propagation:

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) &= S^{-}(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)\left[\Theta\left(t_b-t_a\right)\right]-S^{+}(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)\left[\Theta\left(-\left(t_b-t_a\right)\right)\right] \\
&= \mathrm{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\left[\Phi^{+}_{p_y,n}\left(x_b,y_b;t_b\right)\left(\Phi^{+}_{p_y,n}\left(x_a,y_a;t_a\right)\right)^{\dagger}\right. \\
&\quad\times\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^{+}_{p_y,n}\left(t_b-t_a\right)}\Theta\left(t_b-t_a\right)-\Phi^{-}_{p_y,n}\left(x_b,y_b;t_b\right)\left(\Phi^{-}_{p_y,n}\left(x_a,y_a;t_a\right)\right)^{\dagger} \\
&\quad\left.\times\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^{-}_{p_y,n}\left(t_b-t_a\right)}\Theta\left(-\left(t_b-t_a\right)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{98}
$$

which can also be written in the compact form

$$
\begin{aligned}
S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) = {} & \mathrm{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{s=\pm1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\left[s\Phi^{s}_{p_y,n}\left(x_b,y_b;t_b\right)\left(\Phi^{s}_{p_y,n}\left(x_a,y_a;t_a\right)\right)^{\dagger}\right. \\
& \left.\times\ \sigma_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}\left(t_b-t_a\right)}\Theta\left(s\left(t_b-t_a\right)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{99}
$$

where the normalized eigenspinors of our system are defined by

$$
\begin{aligned}
\Psi^{s}_{p_y,n}\left(x,y;t\right) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}t}\Phi^{s}_{p_y,n}\left(x,y;t\right) \\
&= u^{s}_{p_y,n}\left(x,y;t\right)\chi_{\mathrm{s}}+v^{s}_{p_y,n}\left(x,y;t\right)\chi_{-\mathrm{s}},
\end{aligned}
\tag{100}
$$

with

$$u^s_{p_y,n}(x,y;t) = \mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(x-\frac{m\omega p_y+eE\mathcal{E}^s_{p_y,n}}{m^2\omega^2-e^2E^2}\right)^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^s_{p_y,n}t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y y}\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}$$
$$\times\left\{\left(\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!E_{n,s}}}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)H_n(X)\right.$$
$$\left.+\left(s\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}(n-s+1)!E_{n,s}}}\sinh\frac{\alpha}{2}\right)H_{n-s}(X)\right\} \tag{101}$$

and

$$v^s_{p_y,n}(x,y;t) = \mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(x-\frac{m\omega p_y+eE\mathcal{E}^s_{p_y,n}}{m^2\omega^2-e^2E^2}\right)^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^s_{p_y,n}t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y y}\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}$$
$$\times\left\{-\left(\mathrm{i}s\sqrt{\frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!E_{n,s}}}\sinh\frac{\alpha}{2}\right)H_n(X)\right.$$
$$\left.-\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}(n-s+1)!E_{n,s}}}\cosh\frac{\alpha}{2}\right)H_{n-s}(X)\right\}. \tag{102}$$

Taking into account (98) and making use of (95) allows one to get the following expression of the energy eigenvalues

$$\mathcal{E}^s_{p_y,n} = s\sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}\sqrt{m^2+2\sqrt{m^2\omega^2-e^2E^2}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)}-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y. \tag{103}$$

This result agrees exactly with that of [42].

Unlike the nonrelativistic oscillator in an electric field, where the energy levels are discrete and equispaced, the relativistic one has also discrete energies, but unevenly spaced levels.

We note from (103) that the presence of the electric field suppresses the degeneracy in the y-direction and decreases the distance between the different energy levels. However, in the case where $E\to 0$, (103) reduces to the well-known expression for the Dirac oscillator energy eigenvalues [48]. The case $eE = m\omega$ leads to the relation $\mathcal{E}^s_{p_y,n} = -\varsigma p_y$, which is a physically unacceptable result, since the total energy is always greater than the momentum unless $m = 0$. Therefore, the energies in the latter situation can not be obtained trivially from (103).

By using (100) to (101), one can also find the explicit form of the eigenspinors as follows:

$$\Psi^s_{p_y,n}(x,y;t) = \begin{pmatrix}\psi^s_{p_y,n}\\ \varphi^s_{p_y,n}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}X^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathcal{E}^s_{p_y,n}t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y y}\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}\sqrt{\frac{\widetilde{\omega}}{\omega}}, \tag{104}$$

where

$$\psi^{s}_{p_y,n} = \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[\frac{1+s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\frac{1-s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}\right]H_n\left(X\right)$$
$$+\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)!\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[\frac{1+s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\frac{1-s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right]H_{n-s}\left(X\right) \tag{105}$$

and

$$\varphi^{s}_{p_y,n} = \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m}{2^{n+1}n!\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[\frac{1-s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\frac{1+s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}\right]H_n\left(X\right)$$
$$+\sqrt{\frac{(n-s+1)\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}-m\right)}{2^{n+1-s}\left(n-s+1\right)!\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}}}\left[-\frac{1-s}{2}\sinh\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\frac{1+s}{2}\cosh\frac{\alpha}{2}\right]H_{n-s}\left(X\right). \tag{106}$$

By considering (96) we can see that this result agrees exactly with that of [42].

From (104) we see that if we put $p_y = 0$ at $t = 0$, $\Psi^{s}_{p_y,n}(x, y; t)$ are bound states. It means that if the Dirac oscillator potential is sufficiently strong compared to the electric field, confinement will occur.

If, however, $p = 0$ and $E = 0$ together, one can get from (104) by direct calculation the following results :

$$\Psi^{+}_{p_y,\,n}\left(x,y;t\right) = \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2}x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{n,+}t}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}\left(E_{n,+}+m\right)}{2^{n+1}n!E_{n,+}}}H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right)\\ -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}\left(E_{n,+}-m\right)}{2^{n}\left(n-1\right)!E_{n,+}}}H_{n-1}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\end{pmatrix}, \tag{107}$$

and

$$\Psi^{-}_{p_y,n}\left(x,y;t\right) = \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2}x^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{n,-}t}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}\left(E_{n,-}-m\right)}{2^{n+2}\left(n+1\right)!E_{n,-}}}H_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\\ \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}\left(E_{n,-}+m\right)}{2^{n+1}n!E_{n,-}}}H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right)\end{pmatrix}. \tag{108}$$

Applying the transformation (93) on (108) allow one to obtain the following form

$$\Psi^{-}_{p_y,\,n}\left(x,y;t\right) = \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2}x^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{n+1,+}t}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}\left(E_{n+1,+}-m\right)}{2^{n+2}\left(n+1\right)!E_{n,-}}}H_{n+1}\left(\sqrt{m\omega}x\right)\\ \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}\left(E_{n+1,+}+m\right)}{2^{n+1}n!E_{n+1,+}}}H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right)\end{pmatrix}. \tag{109}$$

The results (107) and (109) agrees with that of [48].

The ground state of the system can be obtained from (104) when $s = 1$ and $n = 0$. It easy to obtain in this special case by direct calculations, the expression below for the ground state normalized wave function.

$$\Psi^{+}_{p_y,\,0}\,(x,y;t) = \mathrm{e}^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2}\left(\tilde{x}^{+,+}_{p_y,0}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}m-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y\right)t+\mathrm{i}p_y y}\sqrt{\sqrt{m\tilde{\omega}/\pi}}\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\begin{pmatrix}\cosh\dfrac{\alpha}{2}\\ -\mathrm{i}\,\sinh\dfrac{\alpha}{2}\end{pmatrix}. \tag{110}$$

This yields the following ground state energy

$$\mathcal{E}^{+}_{p_y,0} = \sqrt{1-\frac{e^2E^2}{m^2\omega^2}}m - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y. \tag{111}$$

6. Nonrelativistic limit

We can deduce the nonrelativistic limit by following the usual process by setting $\mathcal{E}^{s}_{p_y,n} = m + \mathcal{E}^{\mathbb{NR}}$ and considering $\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} \ll m$, where the label $\mathbb{NR}$ stands for nonrelativistic limit.

It is straightforward to check that Taylor expansion of (103) in the second order approximation can be written as

$$\mathcal{E}^{s}_{p_y,n} \approx sm + s\omega\left(n+\frac{1-s}{2}\right) - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{s}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2 + \frac{s\omega^2}{2m}\left(n+\frac{1-s}{2}\right)^2, \tag{112}$$

where the first term corresponds to the rest energy of the particle, the second, third and fourth term refers to the $\mathbb{NR}$ harmonic oscillator in a uniform electric field and the last is the relativistic correction term which we will omitted after.

One may also have

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}+m}{E_{n,s}} \to 2, \tag{113}$$

and

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\omega}{\tilde{\omega}}E_{n,s}-m}{E_{n,s}} \to 0. \tag{114}$$

By taking into account the previous limits we can write $S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a)$ as follows:

$$\begin{aligned} S^c(\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_a) \simeq{}& \mathrm{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p_y}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(X_b^2+X_a^2\right)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y(y_b-y_a)} \\ &\times\left\{\Theta\left((t_b-t_a)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(m+\omega n-\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y-\frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)(t_b-t_a)}\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_b\right)\chi_1\right]\right. \\ &\times\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_a\right)\chi_1^{+}\right] + \Theta\left(-\left(t_b-t_a\right)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m+\omega(n+1)+\frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y-\frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)(t_b-t_a)} \\ &\left.\times\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_b\right)\chi_{-1}\right]\left[\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}H_n\left(X_a\right)\chi_{-1}^{+}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{115}$$

which allows one to obtain the usual eigenfunctions $\Psi^{s}_{p_y,n}(x,t)$ for the nonrelativistic problem as follows:

$$\Psi^{s}_{p_y,n}(x,t) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega n - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y y}\begin{pmatrix}\psi^{\mathbb{NR}}\\ 0\end{pmatrix} \tag{116}$$

with the nonrelativistic function

$$\psi^{\mathbb{NR}} = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^n n!}}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2}\left(x - \frac{\varsigma p_y}{m\omega} - \frac{eE}{m\omega^2}\right)^2} H_n\left(\sqrt{m\omega}\left(x - \frac{\varsigma p_y}{m\omega} - \frac{eE}{m\omega^2}\right)\right) \tag{117}$$

and the corresponding nonrelativistic energy

$$\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} = \omega n - \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2 \tag{118}$$

or on the form

$$\Psi^{s}_{p_y,n}(x,t) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega(n+1) + \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right)t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_y y}\begin{pmatrix}0\\ \psi^{\mathbb{NR}}\end{pmatrix}, \tag{119}$$

with

$$\psi^{\mathbb{NR}} = \sqrt{\frac{\sqrt{m\omega/\pi}}{2^n n!}}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2}\left(x - \frac{\varsigma p_y}{m\omega} + \frac{eE}{m\omega^2}\right)^2} H_n\left(\sqrt{m\omega}\left(x - \frac{\varsigma p_y}{m\omega} + \frac{eE}{m\omega^2}\right)\right) \tag{120}$$

and

$$\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} = \omega(n+1) + \frac{\varsigma eE}{m\omega}p_y - \frac{1}{2m}\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2, \tag{121}$$

For the case $E = 0$ we get the well-known identity

$$\mathcal{E}^{\mathbb{NR}} = \frac{\left(\mathcal{E}^{s}_{p_y,n}\right)^2 - m^2}{2m}. \tag{122}$$

7. Density of current

Let us now calculate the density of current $\vec{J}$ which we can write according to our previous result on the form

$$\vec{J}^{s}_{n} = \mathrm{i}\left\langle \sigma_3\vec{\sigma}\right\rangle. \tag{123}$$

Substituting (100) into (123) and using (90), we find out that the density of current vanishes in the y direction:

$$\begin{aligned} J^{s}_{y,n} = &\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\left(u^{s}_{p_y,n}(x,y;t)^{*}\chi^{+}_{\mathrm{s}} + v^{s}_{p_y,n}(x,y;t)^{*}\chi^{+}_{-\mathrm{s}}\right)\sigma_1 \\ &\times\left(u^{s}_{p_y,n}(x,y;t)\chi_{\mathrm{s}} + v^{s}_{p_y,n}(x,y;t)\chi_{-\mathrm{s}}\right) = 0 \end{aligned} \tag{124}$$

However, for the density of current in the x direction we obtain the following expression

$$J^{s}_{x,n} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left(u^{s}_{p_y,n}(x,y;t)^{*}\chi^{+}_{\mathrm{s}} + v^{s}_{p_y,n}(x,y;t)^{*}\chi^{+}_{-\mathrm{s}} \right)\sigma_2$$
$$\times \left(u^{s}_{p_y,n}(x,y;t)\,\chi_{\mathrm{s}} + v^{s}_{p_y,n}(x,y;t)\,\chi_{-\mathrm{s}} \right)$$
$$= 2\mathrm{i}s\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left(u^{s}_{p_y,n}(x,y;t)^{*} v^{s}_{p_y,n}(x,y;t) \right). \tag{125}$$

The integral in (125) can be carried out with the aid of the following orthogonality property of the normalized Hermite functions:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} H_m(t)\,H_n(t)\,\mathrm{d}t = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}, \tag{126}$$

where δ_{mn} is the Kronecker delta.

By considering (101) and (102), after simple calculation we get the following expression for the density of current:

$$J^{s}_{x,n} = 2\mathrm{i}s\left(-\mathrm{i}s\frac{eE}{2m\omega}\right) = \frac{eE}{m\omega}, \tag{127}$$

which is independent of the values of s and n.

8. Conclusion

In the present paper, using the covariant supersymmetric path integral technique, we have solved the problem of the (2 + 1)-dimensional Dirac oscillator in interaction with a uniform electric field by using the Fradkin–Gitman path integral method for spinning particle. The Green's function is explicitly calculated by using the so-called global projection technique, a variant of the Fradkin–Gitman method that uses only one proper time (Schwinger proper-time) and spares extending the Dirac algebra. Then, we have exactly calculated the spectrum of energy and the eigenspinors expressed in terms of Hermite polynomials. Moreover, by using various symmetry properties of the propagator, we represented it in a form that allow us to obtain, in a natural way without employing the normalization condition, the eigenspinors directly in normalized form. The nonrelativistic limit has also been analyzed and the corresponding wave functions and energies were found in agreement with the literature values. At the end of this paper, we studied the current density and calculate the values of its different components.

Finally, the supersymmetric path integral formulation to represent the propagator of the Dirac oscillator interacting with a uniform electric field allowed a more intuitive way to interpret its quantum dynamics through trajectories and to derive the energies and their corresponding normalized eigenspinors. By this work, the list of relativistic quantum problems resolvable with supersymmetric path integrals has been extended to include the Dirac oscillator in interaction with a uniform electric field.

ORCID iDs

Hassene Bada https://orcid.org/0000-0002-0334-8585

References

[1] Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York, NY: McGraw-Hill)
[2] Fradkin E S 1966 *Nucl. Phys.* **76** 588
[3] Berezin F A and Marinov M S 1977 *Ann. Phys.* **104** 336
[4] Fradkin E S and Gitman D M 1991 *Phys. Rev.* D **44** 3230
[5] Gitman D M, Zlatev S I and Cruz W D 1996 *Brazil. J. Phys.* **26** 419 (http://www.sbfisica.org.br/bjp/files/v26_419.pdf)
[6] Gitman D M and Zlatev S I 1997 *Phys. Rev.* D **55** 7701
[7] Zeggari S, Boudjedaa T and Chetouani L 2001 *Czech. J. Phys.* **51** 185
[8] Zeggari S, Boudjedaa T and Chetouani L 2001 *Phys. Scr.* **64** 285
[9] Boudjedaa T and Chetouani L 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 1651
[10] Merdaci A, Boudiaf L and Chetouani L 2008 *Z. Natforsch.* **63** 283
[11] Merdaci A, Jellal A and Chetouani L 2017 *Ann. Phys.* **384** 116
[12] Merdaci A, Jellal A and Chetouani L 2015 *Int. J. Mod. Phys.* A **30** 1550174
[13] Haouat S and Chetouani L 2007 *Z. Naturforsch.* **62** 34
[14] Rekioua R and Boudjedaa T 2007 *Eur. Phys. J.* C **49** 1091
[15] Houat S and Chetouani L 2007 *Int. J. Theor. Phys.* **6** 57
[16] Houat S and Chetouani L 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 10541
[17] Ito D, Mori K and Carrieri E 1967 *Nuovo Cimento* A **51** 1119
[18] Moshinsky M and Szczepaniak L 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** L817
[19] Sadurni E 2011 *AIP Conf. Proc.* **1334** 249
[20] Torres J M, Sadurn E and Seligman T H 2010 *AIP Conf. Proc.* **1323** 301
[21] Bermudez A, Martin-Delgado M A and Solano E 2007 *Phys. Rev.* A **76** 041801
[22] Bermudez A, Martin-Delgado M A and Solano E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 123602
[23] Bermudez A, Martin-Delgado M A and Luis A 2008 *Phys. Rev.* A **77** 063815
[24] Luo Y, Cui Y, Long Z and Jing J 2011 *Int. J. Theor. Phys.* **50** 2992
[25] Jellal A, Mouhafid A E and Daoud M 2012 *J. Stat. Mech.* P01021
[26] Hamzavi M, Eshghi M and Ikhdair S M 2012 *J. Math. Phys.* **53** 082101
[27] Lu C-K and Herbut I F 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 295003
[28] Zarrinkamar S, Rajabi A A and Hassanabadi H 2010 *Ann. Phys.* **325** 2522
[29] Chargui Y, Trabelsi A and Chetouani L 2010 *Phys. Lett.* A **374** 2907
[30] Bermudez A, Martin-Delgado M A and Luis A 2008 *Phys. Rev.* A **77** 063815
[31] Munarriz J, Dominguez-Adame F and Lima R P A 2012 *Phys. Lett.* A **376** 3475
[32] Grineviciute J and Halderson D 2012 *Phys. Rev.* C **85** 054617
[33] Faessler A, Kukulin V I and Shikhalev M A 2005 *Ann. Phys.* **320** 71
[34] Mandal B P and Rai S K 2012 *Phys. Lett.* A **376** 2467
[35] de Melo G, de Montigny M, Pompeia P and Santos E 2013 *Int. J. Theor. Phys.* **52** 441
[36] Luo Z Y, Wang Q, Li X and Jing J 2012 *Int. J. Theor. Phys.* **51** 2143
[37] Maluf R V 2011 *Int. J. Mod. Phys.* A **26** 4991
[38] Franco-Villafañe J A, Sadurní E, Barkhofen S, Kuhl U, Mortessagne F and Seligman T H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 170405
[39] Villalba V M 1994 *Phys. Rev.* A **49** 586
[40] Quimbay C and Strange P 2013 arXiv:1311.2021
[41] Zhang F-L, Fu B and Chen J-L 2009 *Phys. Rev.* A **80** 054102
[42] Nath D and Roy P 2014 *Ann. Phys.* **351** 13
[43] P Laba H and Tkachuk V M 2018 *Eur. Phys. J. Plus* **133** 279
[44] Bada H and Aouachria M 2019 *Mod. Phys. Lett.* A **34** 1950246
[45] Alexandrou C, Rosenfelder R and Schreiber A W 1999 *Phys. Rev.* A **59** 1762
[46] Kleinert H 1990 *Path Integral in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics* (Singapore: World Scientific)
[47] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1979 *Table of Integrals, Series, and Products* (New York, NY: Academic)
[48] Toyama F M, Nogami Y and Coutinho F A B 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 2585

معالجه مسائل نسبوية ذات سبين 1/2 وفق تكامل المسارات

ملخص

في الفصل الثاني تم اشتقاق داله قرين لمهتز ديراك ثنائي البعد المكاني في وجود مجال كهربائي منتظم وذلك وفق تقنيه تكامل المسارات .بسبب استعمالنا للطريقة المسماة بالإسقاط الشامل، وجهنا بحثنا مبدئيا إلى داله قرين المتعلقة بمربع معادله ديراك عوض تلك المتعلقة بمعادله ديراك ذاتها .الحركة الداخلية المتعلقة بالسبين مثلت بهزازين فرميونيين وصفا بواسطة متغيرات قراسمين وفقا للنموذج الفرميوني لشوينغر .عند إتمام التكامل وفق المتغيرات اللامتبادله (متغيرات قراسمين)، المسألة تتحول إلى تلك الخاصة بالبحث عن داله قرين في الحالة اللانسبويه وفق متغيرات ذات طبيعة بوزونيه فقط .تم بعد ذلك حساب القيم الذاتية للطاقة وكذلك السبينورات الذاتية في هذا الفصل

في الفصل الثالث تم اشتقاق المنتشر لنفس المسألة ولكن هاته المرة وفق تكامل المسارات فوق التناظري وذلك دائما باستعمال تقنيه الإسقاط الشامل حيث وفقنا في حلها .تم هنا أيضا حساب القيم الذاتية للطاقة وكذألك السبينورات الذاتية .علاوة على ذلك، من خلال استخدام خصائص التناظر المختلفة للناشر، قمنا بتمثيله بشكل سمح لنا بالحصول على السبينورات الذاتية مباشرة في شكل مقنن .كما تم في هذا الفصل دراسة الحالة اللانسبويه وكثافة التيار.

تم تخصيص الفصل الرابع للحالة التي لا يوجد فيها حبس .كانت التقنية المستخدمة مماثلة لتلك المستخدمة في الفصل الثاني .كنا قادرين على تحديد داله قرين وصياغة السبينورات الذاتية بواسطة الدوال الاسطوانية المقعرة .لقد قمنا أيضًا في هذا الفصل بحساب معدل تكوين الازواج في الفراغ ووجدناه على شكل سلسلة رياضيه متعلقة بقيمه المجال الكهربائي والتردد الزاوي لمهتز ديراك.

Traitement des problèmes relativistes de spin ½ par l’approche des intégrales de chemins

Résumé

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, le propagateur d'un oscillateur Dirac bidimensionnel en présence d'un champ électrique uniforme est dérivé en utilisant la technique d'intégrales de chemin. Le fait que l'approche nommée globale soit utilisée dans ce travail redirige au préalable notre recherche du propagateur de l'équation de Dirac vers celle du propagateur de sa forme quadratique.
Les mouvements internes relatifs au spin sont représentés par deux oscillateurs fermioniques, qui sont décrits par des variables de Grassmann, selon le modèle fermionique de Schwinger. Une fois que l'intégration sur les variables anticommutatives (variables grassmanniennes) est terminée, le problème devient celui de trouver un propagateur non relativiste avec uniquement des variables bosoniques. Le spectre d'énergie de l'électron et les spineurs propres correspondants sont également obtenus dans ce chapitre.
Le même problème précédent était l’objet du troisième chapitre où le propagateur est dérivé cette fois ci en utilisant la technique des intégrales de chemins super-symétrique et le problème est résolu exactement. Le spectre d'énergie de l'électron et les spineurs sont obtenus. De plus, en utilisant diverses propriétés de symétrie du propagateur, nous l'avons représenté d'une manière qui nous permettait d'obtenir les spineurs propres sous forme normalisée. La limite non relativiste et la densité de courant sont également étudiées.
Le quatrième chapitre a été consacré à la situation où il n’y en a pas de confinement. La technique utilisée était similaire à celle employée au premier chapitre. Nous avons réussi à déterminer le propagateur et à exprimer les spineurs propres à l’aide des fonctions du cylindre parabolique normalisées. Nous avons aussi calculé le taux de production des paires dans le vide sous forme d’une série dont les termes dépendent du champ électrique et de l'impulsion de l'oscillateur.

Treatment the spin ½ relativistic problems using the path integrals approach

Abstract

In the second chapter, the propagator of a two-dimensional Dirac oscillator in the presence of a uniform electric field is derived by using the path integrals technique. The fact that the global named approach is used in this work redirects, beforehand, our search for the propagator of the Dirac equation to that of the propagator of its quadratic form. The internal motions relative to the spin are represented by two fermionic oscillators, which are described by Grassmannian variables, according to Schwinger's fermionic model. Once the integration over the anticommuting variables (Grassmannian variables) is accomplished, the problem becomes the one of find a non-relativistic propagator with only bosonic variables. The energy spectrum of the electron and the corresponding eigenspinors are also obtained in this work.
In the third chapter, the propagator of a two-dimensional Dirac oscillator in the presence of a uniform electric field is derived by using the covariant supersymmetric path integrals technique according to the so-called global projection and the problem is solved exactly. The energy spectrum of the electron and the corresponding eigenspinors are obtained. Moreover, by using various symmetry properties of the propagator, we represented it in a way that allowed us to obtain the eigenspinors directly in normalized form. The nonrelativistic limit and the density of current are also studied.
The fourth chapter was devoted to the situation where there is no confinement. The technique used was similar to that used in the second chapter. We were able to determine the propagator and to express the eigenspinors in term of parabolic cylinder functions. We have also calculated the rate of pair creation in a vacuum in the form of a series whose terms depend on the electric field and the angular frequency of the oscillator.