

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique



Université El-Hadj Lakhdar-BATNA1

Faculté des Sciences de La Matière

Département de Physique



THÈSE

En vue de l'obtention du

Diplôme de Doctorat En Sciences

Présentée par

Mme. AMEL BENAHMED

Thème :

Etude des ondes d'Alfvén dans les plasmas magnétisés

Spécialité : Physique des Rayonnements

Soutenue le : 25 / 06 /2020

Devant le jury :

Président :	M. Derradji BAHLOUL	Prof. Université de Batna 1
Rapporteur :	M. Abdelaziz SID	Prof. Université de Batna 1
Examineurs :	M. Abdelhamid BOULDJEDRI	Prof. Université de Batna 1
	M. Abdellatif TAHRAOUI	Prof. USTHB d'Alger
	M. Rabia AMOUR	MCA.USTHB d'Alger
	Mme. Houria TRIKI	Prof. Université d'Annaba

Remerciements :

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements :

Tout d'abord à Dieu, tout puissant, qui m'a muni de la volonté, de la santé et de la patience durant toutes ces années d'étude et de recherche.

Ce travail de recherche en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en sciences, spécialité physique des rayonnements, a été réalisé au sein de PRIMALAB (Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière) à la Faculté des Sciences de la Matière-Département de Physique-Université de Batna 1, sous la direction de **M. Abdelaziz SID**, professeur à l'université de Batna 1, et le Directeur de ma thèse, que je remercie infiniment pour ses orientations, ses conseils, son soutien pendant toutes les années que j'ai consacrées pour la préparation du travail objet de présent mémoire.

Je tiens à remercier particulièrement et chaleureusement **M. Derradji BAHLOUL**, professeur à l'université de Batna 1, qui m'a donné le grand honneur en venant présider le jury de ma soutenance de doctorat.

Un Grand merci aussi à :

M. Abdelhamid BOULDJEDRI, professeur à l'université de Batna 1,

M. Abdellatif TAHRAOUI, professeur à USTHB d'Alger,

M. Rabia AMOUR, Maitre de conférences A à USTHB d'Alger

Et **Mme. Houria TRIKI**, professeur à l'université de Badji Mokhtar d'Annaba.

Pour l'intérêt et l'importance qu'ils ont donnés à ce travail, aussi pour avoir accepté de faire partie de jury de ma soutenance de doctorat.

Je remercie aussi le professeur **Mkhail Shmatov** de l'institut IOFFE (Saint-Petersbourg, Russie) pour ses discussions fructueuses sur ce travail dans un workshop sur la matière et les rayonnements organisé à l'université de Batna 1.

Dédicace :

A Ma Très Chère Mère

Qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie qu'elle reçoit à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments...

Que Dieu le tout puissant, te préserve et t'accorde santé, longue vie et bonheur.

A Mon Très Cher Père

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit des sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A Mes Chères Sœurs

Nawel, Samira, Lamia, Sameh, Sawssen et ainsi qu'à leurs enfants.

A Mes Chers Frères

Nacer, Chawki, Samir et ainsi qu'à leurs enfants.

A Mon Mari Badis et à Mes enfants : Mes deux yeux; Abdelmouemèn et Barae et à Ma Princesse Israa.

Que dieu vous garde et vous bénisse.

Table des matières :

Table des matières	<i>i</i>
Liste des symboles	<i>ii</i>
Liste des figures	<i>iii</i>

INTRODUCTION GENERALE	2
Problématique	3
Objectif de l'étude	3
Structure de thèse	4

**I. ETUDE DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS UN
PLASMA MAGNETISE**

I.1 Introduction	9
I.2 Etude des ondes électromagnétiques à haute fréquence dans un plasma magnétisé	10
I.2.1 Traitement des ondes électromagnétiques à haute fréquence se propageant perpendiculairement au champ magnétique	10
I.2.1.1 Type des ondes électromagnétiques	10
I.2.1.2 Détermination de la relation de dispersion pour un plasma froid dans le cas de la propagation perpendiculaire ($k \perp B_0$)	11
I.2.1.3 La vitesse du groupe	16
I.2.2 Traitement des ondes électromagnétiques à haute fréquence se propagent parallèlement au champ magnétique	18
I.2.2.1 Détermination de la relation de dispersion pour un plasma froid dans le cas de la propagation parallèle ($k \parallel B_0$)	18
I.2.2.2 L'indice de réfraction	19
I.2.2.3 La fréquence de coupure de l'onde L	21

I.2.2.4 La fréquence de coupure de l'onde R	23
I.3 Etude des ondes électromagnétiques à basse fréquence dans un plasma magnétisé	25
I.3.1 Le tenseur diélectrique	25
I.3.2 La relation de dispersion du plasma froid	29
I.3.3 L'onde d'Alfvén de cisaillement (shear Alfvén wave)	32
I.3.4 L'onde magnétosonique	42
I.3.5 Les ondes d'Alfvén à basse fréquence de T fini, angle arbitraire de propagation	46
I.4 Conclusion	53
I.5 Références	53

II. DESCRIPTION CINÉTIQUE DU PLASMA

II.1 Introduction	57
II.2 Détermination de l'équation de Liouville	58
II.3 Description de la densité de probabilité dans l'espace des phases	58
II.4 Description de l'équation d'évolution de la fonction $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$	60
II.5 Description d'un système sans interactions dépendant de la vitesse	61
II.6 Application de l'équation de Liouville au plasma	63
II.7 Détermination d'un système d'équations de BBGKY	64
II.8 L'équation de l'évolution de la fonction $f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$	65
II.9 L'équation de l'évolution de la fonction de distribution double $f_2(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_2, t)$	66
II.10 Les équations cinétiques d'un gaz pur	68
II.10.1 L'équation de Boltzmann	68
II.10.2 Description du modèle de collision BGK (Bhavnagar, Gross, Krook)	69

II.10.3	Description du modèle de collision Fokker-Planck	69
II.10.4	Description du modèle de Landau	70
II.10.5	L'opérateur de collision électron-ion	71
II.11	Conclusion	73
II.12	Références	74

III. ANISOTROPIE EN TEMPERATURE DANS LES PLASMAS MAGNETISES

III.1	Introduction	77
III.2	L'équation de base	78
III.3	La fonction de distribution	79
III.4	Calcul de la fonction de distribution à haute fréquence	80
III.5	Calcul de la fonction de distribution statique	88
III.6	L'anisotropie en température	91
III.7	Conclusion	95
III.8	Références	95

IV. APPLICATION SUR LA DISPERSION DES ONDES D'ALFVEN

IV.1	Introduction	99
IV.2	Détermination de la relation de dispersion	99
IV.2.1	La limite cinétique de KAWs	102
i.	Propagation parallèle	103
ii.	Cas isotrope	104
IV.2.2	La limite d'inertie de KAWs	104
IV.3	Application des résultats	105
IV.3.1	Détermination de l'onde d'Alfvén inertielle modifiée dans les modes longitudinaux	105
IV.3.2	Détermination de la vitesse du groupe	109
IV.4	Conclusion	109
IV.5	Références	110
	CONCLUSION GENERALE	115
	Résumé	114
	Absract	115
	ملخص	116
	LISTES DES PUBLICATIONS ET DES COMMUNICATIONS	117

Liste des symboles :

Champ électrique	E
Champ magnétique	B
Densité des électrons	n_e
Densité des ions	n_i
Densité de coupure	n_c
Fonction de distribution à l'équilibre	$f_{\alpha 0}$
Fonction de distribution des électrons	f
Fonction de distribution à haute fréquence	f^h
Fonction de distribution statique	f^s
Force de Lorentz	F_L
Fréquence électron cyclotron	ω_{ce}
Fréquence cyclotron à ion	ω_c
Fréquence cyclotron à électron	ω_p
Fréquence de collision	ν_{α}
Fréquence de collision électron-ion	ν_{ei}
Fréquence de plasma électronique	ω_p
Fréquence de plasma ionique	Ω_p
Fréquence angulaire	ω
Indice de réfraction	\tilde{n}
Indice de réfraction parallèle	$n_{//}$
Indice de réfraction perpendiculaire	n_{\perp}
Indice de réfraction total	n
Logarithme coulombien	$\ln \Lambda$

Liste des symboles

Longueur de Debye pour les e et ions	λ_{Dei}
Libre parcours moyen des électrons	λ_{ei}
Masse des électrons	m_e
Masse des ions	m_i
Nombre d'onde parallèle	$k_{//}$
Nombre d'onde perpendiculaire	k_{\perp}
Opérateur de collision	C_{ei}
Polynôme de Legendre	P_l
Température des électrons	T_e
Température des ions	T_i
Température parallèle	$T_{//}$
Température perpendiculaire	T_{\perp}
Tenseur diélectrique	$\underline{\epsilon}$
Tenseur diélectrique perpendiculaire du plasma	ϵ_{\perp}
Vitesse du groupe	v_g
Vitesse des électrons	v_e
Vitesse thermique	v_{th}
Vitesse d'Alfvén	v_A
Vitesse de la lumière	c
Vitesse du son	c_s

Listes des figures :

FIG I.1. Relation de dispersion pour l'onde extraordinaire se propageant perpendiculairement à B dans un plasma magnétisé, avec ω_c^2 choisie pour égale à $2\omega_p^2$	15
FIG I.2 Onde électromagnétique polarisée circulairement à gauche se propageant parallèlement à B_0 dans un plasma magnétisé, avec ω_c^2 choisie égale $2\omega_p^2$	22
FIG I.3 Onde électromagnétique polarisée circulairement à droite, se propageant parallèlement à B_0 dans un plasma magnétisé, avec ω_c^2 choisie égale à $2\omega_p^2$	24
FIG I.4 Relation de dispersion pour l'onde d'Alfvén de cisaillement R, avec $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$	37
FIG I.5 Relation de dispersion pour l'onde d'Alfvén de cisaillement L, avec $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$	38
FIG I.6 Relation de dispersion pour l'onde magnéto-sonique dans la limite du plasma froid avec ω_c^2 égale à $2\omega_p^2$	40
FIG III.1 L'anisotropie de la fonction de distribution pour différentes valeurs du champ magnétique	97
FIG III.2 L'anisotropie de la température en fonction du paramètre $\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}$	98
FIG IV.1 La fréquence angulaire ω en fonction du nombre d'onde $k_{//}$	111

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'étude d'un plasma en présence d'un champ magnétique a été largement décrite dans la littérature depuis les années 50. L'existence d'un champ magnétique externe dans un milieu pareil, induit de nombreuses modifications sur la dynamique des particules. Lorsque la trajectoire d'une particule s'enroule autour des lignes du champ magnétique, elle peut subir une modification de sa trajectoire, on parlera ici d'un plasma magnétisé.

On appelle un plasma magnétisé, un plasma dans lequel un champ magnétique ambiant est suffisamment fort pour modifier de manière significative les trajectoires des particules. Ce type de plasma est un bon environnement pour divers phénomènes physiques qui sont intensivement étudiés dans la littérature. A savoir, l'onde d'Alfvén [1,2], les instabilités du cyclotron [3] et la reconnexion du champ magnétique [4,5]. Le plasma magnétisé présente une anisotropie en température qui peut être interprétée de manière microscopique par une fonction de distribution anisotrope. Habituellement, dans la littérature, cette fonction de distribution est supposée d'être une fonction de distribution bi-maxwellienne :

$$f_{BM}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{n_e}{T_{\perp} T_{\parallel}^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{m_e v_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}}\right) \exp\left(-\frac{m_e v_{\perp}^2}{2T_{\perp}}\right) \quad (I)$$

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'anisotropie en température [6] dans les plasmas magnétisés, pour cela :

- Nous allons calculer explicitement la fonction de distribution en vitesses pour un plasma chaud magnétisé en tenant compte du champ magnétique et des collisions (é-i), l'équation appropriée pour décrire ce genre de plasma (chaud et très ionisé) est celle de Fokker-Planck[7].
- Utiliser quelques approximations des expériences de fusion magnétique [8] et des plasmas d'astrophysique magnétisés. En considérant deux échelles de temps : une échelle

de temps rapide relative au mouvement cyclotronique des électrons autour des lignes du champ magnétique et une deuxième échelle hydrodynamique lente relative au mouvement thermique des électrons.

- Nous allons aussi exprimer les températures électroniques dans les directions parallèles et perpendiculaires au champ magnétique pour les calculer et démontrer ensuite cette anisotropie.

➤ **Problématique :**

Notre étude de l'anisotropie en température dans les plasmas magnétisés peut trouver plusieurs applications pour différents phénomènes comme : les ondes d'Alfvén et l'instabilité de Weibel et aussi dans plusieurs axes de recherche, comme dans les expériences de fusion magnétique, dans les plasmas de fusion thermonucléaire ainsi que dans les plasmas stellaires et en particulier dans le schéma de fusion par inertie magnétisée (MIF).

➤ **Objectif de l'étude :**

L'objectif essentiel de ce travail est l'investigation l'anisotropie en température parallèle et perpendiculaire dans les plasmas magnétisés, après que nous avons démontré analytiquement et même graphiquement (par une simulation numérique) ; que la fonction de distribution est anisotrope et elle dépend explicitement de l'amplitude du champ magnétique et de la fréquence des collisions électrons-ions. Pour cela, en utilisant quelques approximations des expériences de fusion magnétique et des plasmas d'astrophysique magnétisés et ce en séparant l'échelle du temps dans l'équation de Fokker-Planck pour avoir un système de deux équations couplées.

➤ **Structure de thèse :**

Le contenu de cette thèse se compose de quatre chapitres, présentés comme suit :

Le premier chapitre contient deux parties importantes dont la première est consacrée au traitement des ondes électromagnétiques à hautes fréquences dans laquelle, nous étudions uniquement des ondes qui se propagent d'une manière perpendiculaire et parallèle à \mathbf{B}_0 , ainsi nous développons le formalisme des angles arbitraires de propagation, qui peuvent créer des possibilités de la résonance de l'onde ainsi que de seuil. Nous profiterons donc l'occasion dans cette partie de comparer entre les seuils et les résonances. Ensuite, dans la deuxième partie, qui est consacré au traitement des ondes électromagnétiques à basses fréquences, nous étudions les classes des ondes qui deviennent disponibles à des fréquences basses. Ces ondes ont un intérêt théorique et pratique considérable, pour cela, nous considérons le plasma a soit un tenseur de conductivité électrique complexe dispersif ou plus classiquement, une réponse diélectrique de tenseur complexe dispersif. Ça nous permet d'unifier toutes les ondes étudiées ; les ondes électrostatiques X et O dans la direction perpendiculaire, les ondes R et L dans la direction parallèle, en utilisant un formalisme unique valable pour tous les angles de propagation.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une description cinétique du plasma ainsi que ses équations ; commençant par l'équation de Liouville qui nous aidons à l'étude du comportement dynamique d'un système de N particules en interaction, puis nous appliquons cette équation au plasma. Ensuite, nous décrivons le comportement de ce système des particules chargées utilisant les équations de Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY). Les approximations utilisées sur la hiérarchie « BBGKY » représentent l'origine des équations cinétiques qui sont : L'équation de Boltzmann, l'équation de Landau et l'équation de Fokker-Planck qui est la base de notre travail définie dans le chapitre suivant.

Ensuite dans le troisième chapitre ; nous faisons un calcul analytique puis numérique pour montrer l'anisotropie en température des électrons pour un plasma magnétisé, dans le cadre de la théorie cinétique. L'équation de Fokker-Planck est l'équation appropriée pour décrire ce genre de plasma décrite en premier paragraphe. Afin de calculer la fonction de distribution électronique dans le deuxième paragraphe, nous considérons la théorie cinétique d'une particule avec 6D d'espace de phases: (\vec{r}, \vec{v}) . Puis, dans le quatrième et le cinquième paragraphe, nous calculons la fonction distribution à haute fréquence f^h et statique f^s , respectivement. Ensuite le sixième paragraphe est consacré au calcul de la température des électrons dans la direction parallèle et perpendiculaire du champ magnétique où nous montrons l'anisotropie en température et ce sous forme théorique puis graphique. Enfin, dans le dernier paragraphe nous donnons une interprétation pour les résultats obtenus.

Finalement, le quatrième chapitre est consacré à une application de la dispersion des ondes d'Alfvén, dans lequel, nous voulons appliquer nos résultats obtenus à ceux obtenus par **M. F. Bashir et al.**, présenté dans la référence [1] de ce chapitre.

Dans ce travail, le système linéaire de Vlasov-Maxwell est présenté dans le premier paragraphe ensuite un tenseur diélectrique généralisé est dérivé pour un plasma d'électrons – ions, bi-maxwellien, non relativiste et magnétisé dans le même paragraphe. Dans le deuxième paragraphe, une nouvelle relation de dispersion décrivant la propagation oblique des modes d'Alfvén a été déterminée en incorporant les anisotropies de température des électrons et des ions à la fois. De la relation dispersion résultante pour les ondes d'Alfvén cinétiques (KAWS), les expressions analytiques sont déterminées pour les régimes cinétiques et inertiels respectivement.

Le dernier paragraphe de ce chapitre consacré aux applications de nos résultats à ce qui est déterminé précédemment par **M. F. Bashir et al.**, c'est à dire la détermination de la relation de

dispersion de l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique résultant de l'anisotropie de la température dans les modes longitudinaux ($k_{\perp} = 0$), donc nous limiterons cette étude seulement pour les ions et nous négligeons l'effet des électrons.

Pour cela, nous allons montrer analytiquement puis graphiquement après un calcul numérique, qu'il existe une relation entre la fréquence angulaire ω (l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique) et le nombre d'onde k_{\parallel} qui correspond aux modes longitudinaux et nous allons conclure la vitesse du groupe.

CHAPITRE I :

ETUDE DES ONDES

ELECTROMAGNETIQUES DANS UN

PLASMA MAGNETISE

I. ETUDE DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS UN PLASMA MAGNETISE

I.1 Introduction	9
I.2 Etude des ondes électromagnétiques à haute fréquence dans un plasma magnétisé	10
I.2.1 Traitement des ondes électromagnétiques à haute fréquence se propageant perpendiculairement au champ magnétique	10
I.2.1.1 Type des ondes électromagnétiques	10
I.2.1.2 Détermination de la relation de dispersion pour un plasma froid dans le cas de la propagation perpendiculaire ($k \perp B_0$)	11
I.2.1.3 La vitesse du groupe	16
I.2.2 Traitement des ondes électromagnétiques à haute fréquence se propagent parallèlement au champ magnétique	18
I.2.2.1 Détermination de la relation de dispersion pour un plasma froid dans le cas de la propagation parallèle ($k \parallel B_0$)	18
I.2.2.2 L'indice de réfraction	19
I.2.2.3 La fréquence de coupure de l'onde L	21
I.2.2.4 La fréquence de coupure de l'onde R	23
I.3 Etude des ondes électromagnétiques à basse fréquence dans un plasma magnétisé	25
I.3.1 Le tenseur diélectrique	25
I.3.2 La relation de dispersion du plasma froid	29
I.3.3 L'onde d'Alfvén de cisaillement (shear Alfvén wave)	32
I.3.4 L'onde magnéto-sonique	42
I.3.5 Les ondes d'Alfvén à basse fréquence de T fini, angle arbitraire de propagation	46
I.4 Conclusion	53
I.5 Références	53

I.1. Introduction :

Une onde électromagnétique comporte à la fois un champ électrique \mathbf{E} et un champ magnétique \mathbf{B} oscillant à la même fréquence, ils sont classés selon leurs fréquences en deux catégories : Les ondes électromagnétiques à hautes fréquences et celles à basses fréquences.

Nous allons traiter dans une première partie, le cas des ondes électromagnétiques à hautes fréquences dans la présence d'un champ magnétique \mathbf{B}_0 , en introduisant le champ magnétique dans un milieu plasma à l'équilibre. Dans cette même partie, nous examinerons uniquement les ondes qui se propagent parfaitement d'une manière perpendiculaire et parallèle à \mathbf{B}_0 , nous supposeront ici que la fréquence de l'onde est suffisamment élevée, pour que les ions peuvent être considérés comme stationnaires, où nous allons développer le formalisme des angles arbitraires de propagation. Le nouvel effet dynamique (c.à.d. la giration Larmor) [9] qui est introduit par le champ magnétique, crée des possibilités de la résonance de l'onde ainsi que des seuils. Nous profiterons l'occasion pour comparer entre les seuils et les résonances.

Ensuite, dans la deuxième partie, nous allons traiter le cas des ondes électromagnétiques à basses fréquences dans laquelle, nous étudions les classes des ondes qui deviennent disponibles à des fréquences inférieures dues au mouvement d'ions. Ces ondes ont un intérêt théorique et pratique considérable, dans lequel, nous considérons que le plasma d'avoir soit un tenseur de conductivité électrique complexe dispersif ou, plus classiquement, une réponse diélectrique de tenseur complexe dispersif. Cela nous permet d'unifier toutes les ondes que nous allons étudier ; les ondes électrostatiques X et O dans la direction perpendiculaire, les ondes R et L dans la direction parallèle, en utilisant un formalisme unique valable pour tous les angles de propagation.

I.2 Etude des ondes électromagnétiques à haute fréquence dans un plasma magnétisé :

I.2.1 Traitement des ondes électromagnétiques à haute fréquence se propageant perpendiculairement au champ magnétique :

Nous traitons maintenant le cas des ondes électromagnétiques qui se propagent perpendiculairement à B_0 , c'est-à-dire $k \perp B_0$ (l'orientation du vecteur d'onde k ou du champ électrique E par rapport au champ magnétique B_0), pour cette propagation perpendiculaire, nous trouvons d'autres types d'ondes.

I.2.1.1 Types des ondes électromagnétiques :

Nous avons dans ce cas deux types d'ondes : les ondes ordinaires et les ondes extraordinaires. Pour les ondes ordinaires ou parfois abrégées en O se trouvent où nous avons une onde qui se propage perpendiculairement à B_0 , mais le champ électrique de l'onde est orienté selon B_0 . Cela signifie que le champ magnétique ne joue aucun rôle dans la dynamique d'onde donc la force de Lorentz $u_1 \times B_0$ [10] est nulle, c'est-à-dire que le mode ordinaire ne remarque jamais B_0 . Ainsi, l'onde ordinaire dans un plasma magnétisé avec $k \perp B_0$ (ondes perpendiculaires), c'est juste $E_1 \perp k$ et $E_1 \parallel B_0$.

L'autre orientation possible de E_1 , c'est-à-dire $E_1 \perp B_0$ a quelques propriétés extraordinaires ou parfois abrégées en X. Dans ce cas, il y a deux composantes transversale et longitudinale dépendantes de la fréquence ω . Lorsque ω est très proche de la résonance hybride supérieure (que nous allons définir prochainement), il est purement longitudinal ($E_1 \parallel k$), mais ailleurs il y a une composante transversale ($E_1 \perp k$). D'une manière générale, le champ

électrique de cette onde présente une composante le long de $(\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0)$ et une composante perpendiculaire à \mathbf{k} et à \mathbf{B}_0 . Si nous choisissons \mathbf{B}_0 se trouve dans la direction z , et \mathbf{k} se situe dans la direction x , alors E_1 peut avoir des composantes dans les deux directions x et y .

I.2.1.2 Détermination de la relation de dispersion pour un plasma froid dans le cas de la propagation perpendiculaire ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) :

Nous supposons que les ions sont stationnaires, car leur inertie est trop grande pour eux pour répondre à une onde de haute fréquence, et nous négligeons la pression électronique qui peut réellement être importante ici car cette onde n'est pas incompressible. Cette approximation est parfois appelée théorie du « plasma froid » [11], il est équivalent en supposant $T_e = T_i = 0$. Avec ces hypothèses, l'équation fluide du mouvement linéaire pour l'électron est :

$$\begin{aligned} -i\omega m u_{x_1} &= -e(E_{x_1} + u_{y_1} B_0) \\ -i\omega m u_{y_1} &= -e(E_{y_1} - u_{x_1} B_0) \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Qui peut être simplement résolue pour u_{x_1} et u_{y_1} qui représentent les vitesses de fluide d'électrons dans les directions x et y respectivement. Nous pouvons utiliser la méthode des déterminants pour résoudre ce système d'équations linéaires, exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} eE_{x_1}/m &= i\omega u_{x_1} - \omega_c u_{y_1} \\ eE_{y_1}/m &= \omega_c u_{x_1} + i\omega u_{y_1} \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Où : $\omega_c = \frac{e}{mB_0}$ représente la fréquence de coupure.

Le facteur déterminant est $\omega_c^2 - \omega^2$ et les solutions sont :

$$u_{x1} = \frac{(e/m)(i\omega E_{x1} + \omega_c E_{y1})}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

$$u_{y1} = \frac{(e/m)(i\omega E_{y1} + \omega_c E_{x1})}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad (\text{I.3})$$

Nous substituons ces vitesses de fluide d'électrons dans l'équation des ondes, soit l'équation :

$$k^2 E_1 - k(k \cdot E_1) = (\omega^2/c^2)[E_1 + ij_1 / (\varepsilon_0 \omega)] \quad (\text{I.4})$$

Avec : $j_1 = -n_0 e u_1$; qui représente la densité volumique du plasma.

D'abord, nous séparons cette équation vectorielle en deux composantes dans les directions x et y. Le vecteur E_1 n'a aucune composante dans la direction z, puisque cela correspond au mode ordinaire. Nous avons choisi k pour la direction x, de sorte que le côté gauche de l'équation (I.4) n'a pas de composante x. Contrairement pour le côté droit de l'équation (I.4), nous obtenons alors :

$$E_{x1} = \frac{i(n_0 e^2 / \varepsilon_0 m)(i\omega E_{x1} + \omega_c E_{y1})}{\omega(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (\text{I.5})$$

Et à partir de la composante y, multipliant par c^2 / ω^2 , on obtient :

$$(1 - c^2 k^2 / \omega^2) E_{y1} = \frac{i(n_0 e^2 / \varepsilon_0 m)(i\omega E_{y1} + \omega_c E_{x1})}{\omega(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (\text{I.6})$$

Notant la présence de la fréquence de plasma au carrée ; $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}$ dans ces équations, et en observant aussi que nous avons ici deux équations linéaires à deux inconnues, nous multiplions par $(\omega_c^2 - \omega^2)$ et réécrivons les équations comme :

$$(\omega_c^2 - \omega^2 + \omega_p^2)E_{x1} - i(\omega_p^2 \omega_c / \omega)E_{y1} = 0$$

$$i(\omega_c^2 \omega_c / \omega)E_{x1} + [(1 - c^2 k^2 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2]E_{y1} = 0 \quad (\text{I.7})$$

Encore une fois, nous pouvons résoudre ces équations par la méthode des déterminants, mais nous n'avons pas pu obtenir l'amplitude de E_1 à partir de ces équations : lorsque le côté droit de cette équation matricielle disparaît alors la solution est dégénérée, et plutôt nous obtenons un critère sur les coefficients, leur déterminant devrait disparaître. Cela nous donne :

$$(\omega_c^2 - \omega^2 + \omega_p^2)[(1 - c^2 k^2 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2)] - (\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2 = 0 \quad (\text{I.8})$$

La relation de dispersion peut maintenant être écrite :

$$\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right)(\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2 = (\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2 / (\omega_c^2 - \omega^2) \quad (\text{I.9})$$

C'est effectivement la relation de dispersion $[\omega = \omega(k)]$ que nous cherchons. Nous définissons la fréquence hybride supérieure **[12]** comme :

$$\omega_h^2 \equiv \omega_p^2 + \omega_c^2 \quad (\text{I.10})$$

Si nous substituons l'expression (I.9) dans (I.10), nous obtenons :

$$\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right)(\omega_c^2 - \omega^2) = \frac{-\omega_p^2(\omega_p^2 + \omega_c^2 - \omega^2) + (\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2}{(\omega_h^2 - \omega^2)} = \frac{-\omega_p^2(\omega_c^2 - \omega^2) + (\omega_p^4 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2)}{(\omega_h^2 - \omega^2)} \quad (\text{I.11})$$

Puis, en divisant par $(\omega_c^2 - \omega^2)$ et les conditions de réarrangement, on obtient :

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_p^2} = 1 - \frac{\omega_c^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2)} \quad (\text{I.12})$$

Ici, nous voyons que lors de la résonance hybride supérieure, $k \rightarrow \infty$, c'est à dire la longueur d'onde tend vers zéro. C'est ce que l'on entend par résonance. Aussi lorsque $k \rightarrow \infty$, la vitesse de phase tend vers zéro.

La relation de dispersion a également deux seuils, définis comme $k \rightarrow 0$, c'est à dire la longueur d'onde tend vers l'infini. Ceux-ci peuvent être trouvés en définissant :

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2 - \omega_p^2) = \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_p^2) \quad (\text{I.13})$$

Il s'agit d'une équation quadratique pour ω^2 , divisant les deux côtés par $\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2)$, on obtient :

$$1 - \omega_c^2 / (\omega^2 - \omega_p^2) = \omega_p^2 / \omega^2 \quad (\text{I.14})$$

Et en poursuivant ces calculs, nous avons :

$$(1 - \omega_p^2 / \omega^2) = (\omega_c^2 / \omega^2)(1 - \omega_p^2 / \omega^2) \quad (\text{I.15})$$

À partir de laquelle, nous prenons la racine carrée, pour obtenir :

$$(1 - \omega_p^2 / \omega^2) = \mp (\omega_c / \omega) \quad (\text{I.16})$$

Ce qui nous donne deux équations du second degré, avec (probablement) quatre solutions. Les équations du second degré peuvent être réécrites comme suit :

$$(\omega^2 \mp \omega \omega_c - \omega_p^2) = 0 \quad (\text{I.17})$$

Et les quatre solutions contiennent deux \mp symboles indépendants :

$$\omega = \frac{1}{2} \left[\mp \omega_c \mp (\omega_c^2 + 4 \omega_p^2)^{1/2} \right] \quad (\text{I.18})$$

Cependant, un ω négatif n'a pas de sens, par convention $\omega > 0$ et k est un vecteur signé pour nous donner la direction de propagation, de sorte que deux des solutions ne sont pas utiles, et nous obtenons seulement deux fréquences de coupure distinctes physiquement comme :

$$\omega = \left[\mp \omega_c + (\omega_c^2 + 4 \omega_p^2)^{1/2} \right] / 2 \equiv \begin{cases} \omega_R \\ \omega_L \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Le signe + donne la fréquence du seuil « droite » et le signe – donne la fréquence du seuil « gauche », notés ω_R et ω_L respectivement. La raison de cette nomenclature est que ces

mêmes fréquences apparaîtront comme des seuils pour les ondes polarisées circulairement gauche et droite se propageant parallèlement à B_0 . Les fréquences de coupure ne varient pas avec l'angle de propagation. En revanche, la fréquence de résonance hybride supérieure décroît à mesure que l'onde s'éloigne de la perpendiculaire. Il est également intéressant de noter ici que la résonance hybride supérieure et le seuil de droite (la coupure à droite) sont clairement dans le domaine des hautes fréquences. Toutefois, si $\omega_p \ll \omega_c$ puis le seuil de gauche peut apparaître à basses fréquences, où la dynamique d'ions peut être importante dans le calcul de ω_L , et dans la dynamique d'ondes. C'est le cas que nous allons l'étudier dans la partie suivante.

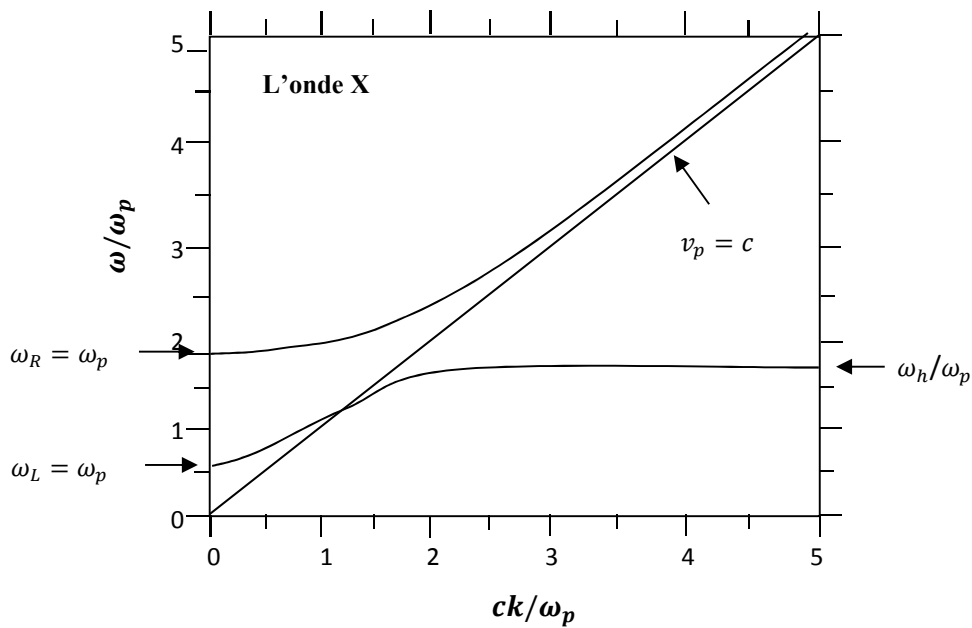


Figure I.1. Relation de dispersion pour l'onde extraordinaire se propageant perpendiculairement à B dans un plasma magnétisé, avec ω_c^2 choisie égale à $2\omega_p^2$

La figure (I.1) montre que les seuils et les résonances sont importantes en partie parce qu'ils définissent les bandes passe et stop où les ondes peuvent se propager dans un plasma. Ceci est clairement illustré dans la relation de dispersion pour l'onde extraordinaire dans la figure (I.1), nous avons choisi les paramètres du plasma tels que $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$. Cela montre que les ondes peuvent se propager dans les zones de bande de passage de $\omega_L < \omega < \omega_h$ et $\omega > \omega_R$, mais une bande d'arrêt existe dans l'intervalle $\omega_h < \omega < \omega_R$. Les seuils sont aux fréquences où la relation de dispersion disparaît en $k = 0$, et les résonances sont où $k \rightarrow \infty$.

I.2.1.3 La vitesse du groupe :

Si nous imaginons une onde X qui se propage perpendiculairement à B_0 , et directement vers le bas d'une densité ou d'un gradient de champ magnétique jusqu'à ce qu'il atteigne «la couche» de l'hybride supérieure ou la résonance hybride supérieure, nous pouvons voir graphiquement dans la figure (I.1) que la vitesse du groupe tend vers zéro. En multipliant l'équation (I.12) par ω^2 et en la dérivant, nous trouvons, comme $\omega \rightarrow \omega_h$:

$$2c^2 k dk \approx 2\omega d\omega + \frac{2\omega_p^2 \omega d\omega}{(\omega_h^2 - \omega^2)} + \frac{2\omega_p^2 \omega_c^2 \omega d\omega}{(\omega_h^2 - \omega^2)^2} \quad (I.20)$$

En utilisant une approximation pour obtenir une résolution d'équations (I.12), près de

$\omega = \omega_h$, on obtient la vitesse de phase comme :

$$v_p \equiv \omega/k \approx c\omega_h(\omega_h^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_p\omega_c \quad (I.21)$$

Et pour la vitesse du groupe, on obtient

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g \approx \frac{(\omega_h^2 - \omega^2)^2 c^2}{\omega_p^2 \omega_c^2 v_p} \approx \frac{(\omega_h^2 - \omega^2)^{3/2} c}{\omega_p \omega_c \omega_h} \quad (I.22)$$

Près de la résonance, v_g^2 varie en :

$$v_g^2 \approx (\omega_h^2 - \omega^2)^3 c^2 / (\omega_p \omega_c \omega_h)^2 \quad (\text{I.23})$$

Ainsi, dans les limites de la théorie de plasma froid linéaire et si en supposant une propagation d'onde purement perpendiculaire, l'amplitude de l'onde doit croître régulièrement de la couche supérieure hybride quand on pompe l'énergie de l'extérieur, ce qui explique pourquoi on appelle cela une résonance.

Pour voir comment fonctionnent les seuils, qui sont très différents de résonances, il est plus simple de considérer la coupure (le seuil) de l'onde électromagnétique à $\omega = \omega_p$ dans un plasma non magnétisé [13]. (Ce qui a la même relation de dispersion comme le mode ordinaire ($E_1 \parallel B_0$) et perpendiculaire ($k \perp B_0$) des ondes dans un plasma magnétisé), nous avons :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (\text{I.24})$$

Et

$$v_g = c / (1 + \omega_p^2 / k^2 c^2)^2 \quad (\text{I.25})$$

Donc :

$$v_g^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}} = \frac{c^2}{\left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}\right]} = \frac{c^2}{\left[\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}\right]} = c^2 (1 - \omega_p^2 / \omega^2) \quad (\text{I.26})$$

Il y a donc une «force de rappel» à la coupure, qui accélère l'énergie des ondes hors du plasma, de sorte qu'elle ne s'accumule pas à la coupure. Généralement, l'énergie des ondes est essentiellement réfléchié totalement à la coupure, bien que les effets de réfraction doivent être pris en compte pour la géométrie spécifique considérée. Dans certaines géométries, la réfraction courbera la trajectoire du rayon de sorte qu'elle n'atteigne même pas la coupure.

I.2.2 Traitement des ondes électromagnétiques à haute fréquence se propageant parallèlement au champ magnétique :

Dans la section précédente, nous avons traité des ondes à hautes fréquences se propagent perpendiculairement à B_0 ($k \perp B_0$). Maintenant, nous allons traiter le cas de la propagation parallèle, $k \parallel B_0$, toujours dans la limite haute fréquence où les ions peuvent être considérés comme stationnaires par rapport aux électrons.

I.2.2.1 Détermination de la relation de dispersion pour un plasma froid dans le cas de la propagation parallèle ($k \parallel B_0$) :

Comme précédemment, nous avons B_0 dans la direction z , et si k est maintenant dans la direction z aussi. Encore une fois, nous utilisons l'équation d'onde :

$$k^2 E_1 - k(k \cdot E_1) = (\omega^2/c^2)[E_1 + i\mathbf{j}_1/(\epsilon_0\omega)] \quad (I.27)$$

Il existe un mode longitudinal ($E_1 \parallel k$) se propageant parallèlement à B_0 , c'est à dire avec ($k \parallel B_0$), mais c'est juste l'onde de Langmuir électrostatique pour $B_0 = 0$ [14]. En fait, dans la limite de plasma froid que nous utilisons ici, c'est juste l'oscillation de Langmuir à $\omega = \omega_p$ indépendante de k .

Pour trouver un nouveau mode électromagnétique, nous allons prendre $k, E_1 = 0$, en rappelant que nous avons pris k soit dans la direction z , nous avons :

$$E_1 = E_{x1}\hat{x} + E_{y1}\hat{y} \quad (I.28)$$

Dans notre calcul de l'onde extraordinaire, nous avons calculé u_{x1} et u_{y1} en termes de E_{x1} et E_{y1} , voir l'équation (I.3). Puisque B_0 était dans la direction z dans ce calcul aussi, les résultats s'appliquent aussi bien dans notre cas présent, c'est-à-dire :

$$u_{x1} = \frac{(e/m)(i\omega E_{x1} + \omega_c E_{y1})}{(\omega_c^2 - \omega^2)}$$

$$u_{y1} = \frac{(e/m)(i\omega E_{y1} + \omega_c E_{x1})}{(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (I.29)$$

Ensuite, nous allons substituer j_1 dans l'équation (I.27) en utilisant : $j_1 = -neu_1$. La composante y de l'équation est identique à celle de l'onde extraordinaire :

$$(1 - c^2 k^2 / \omega^2) E_{y1} = \frac{i(n_0 e^2 / \epsilon_0 m)(i\omega E_{y1} + \omega_c E_{x1})}{(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (I.30)$$

Et parce que k est maintenant dans la direction z, la composante x dans ce temps ressemble beaucoup à la composante y, c'est-à-dire :

$$(1 - c^2 k^2 / \omega^2) E_{x1} = \frac{i(n_0 e^2 / \epsilon_0 m)(i\omega E_{x1} + \omega_c E_{y1})}{(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (I.31)$$

Nous utilisons les méthodes matricielles, Nous trouvons :

$$\begin{aligned} i(\omega_p^2 \omega_c / \omega) E_{x1} + [(1 - c^2 k^2 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2] E_{y1} &= 0 \\ [(1 - c^2 k^2 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2] E_{x1} - i(\omega_p^2 \omega_c / \omega) E_{y1} &= 0 \end{aligned} \quad (I.32)$$

Et encore, nous exigeons que le déterminant soit nul, soit :

$$(\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2 - [(1 - c^2 k^2 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2]^2 = 0 \quad (I.33)$$

Donc, nous avons deux solutions :

$$(\omega_p^2 \omega_c / \omega) = \mp [(1 - c^2 k^2 / \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2] \quad (I.34)$$

I.2.2.2 L'indice de réfraction :

Pour résoudre $\tilde{n}^2 \equiv c^2 k^2 / \omega^2 = c^2 v_p^2$ (où \tilde{n} est l'indice de réfraction), nous multiplions par ∓ 1 et nous divisons par $(\omega_c^2 - \omega^2)$ pour obtenir :

$$(1 - c^2 k^2 / \omega^2) = \frac{\mp(\omega_p^2 \omega_c / \omega) - \omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \quad (\text{I.35})$$

Où :

$$\tilde{n}^2 \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_c \mp \omega_c)}{\omega (\omega_c^2 - \omega^2)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega \mp \omega_c)}$$

Pour les signes supérieurs et inférieurs, nous appelons « l'onde L » et « l'onde R », respectivement. Ces deux solutions correspondent à des ondes polarisées circulairement. Cela signifie que E_{x1} et E_{y1} oscillent avec $\pi/2$ en opposition de phase les uns avec les autres, mais ont la même amplitude. Ceci peut être vu à partir de la première partie de l'équation (I.32) couplée avec l'équation (I.34). La solution correspondante au signe supérieur a $E_{y1} = -E_{x1}$ et la solution correspondante au signe inférieur a $E_{y1} = iE_{x1}$.

Cela implique que le signe supérieur correspond à une onde de rotation selon une règle de la main gauche : pouce gauche le long de B_0 , les doigts indiquant le sens de rotation du vecteur de champ électrique. Le signe inférieur suit la règle de la main droite correspondante. Pour illustrer ceci, prenons $x = 0$ et un retard de phase global de zéro pour E_{x1} . Ensuite, les dépendances temporelles de E_{x1} et E_{y1} pour le signe supérieur (ondes L) sont données par :

$$\begin{aligned} E_{x1}(t) &= \text{Re}\{\bar{E}_{x1}[\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)]\} = \bar{E}_{x1} \cos(\omega t) \\ E_{y1}(t) &= \text{Re}\{-i\bar{E}_{x1}[\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)]\} = -\bar{E}_{x1} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

Physiquement, le sens de rotation de l'onde a un impact sur la relation de dispersion $\omega(k)$ car elle est liée à la direction de rotation des particules qui portent j_1 . Tant que les ondes L et R peuvent se propager dans les deux sens le long de B_0 , la relation de dispersion ne contient que k^2 . Les ondes L, par définition, ont toujours leur vecteur de champ électrique tournant à la règle de la main gauche, par rapport à la direction de B_0 . De même, l'onde R sera toujours tournée selon la règle de la main droite le long de B_0 , qui est bien sûr le sens dans lequel les électrons tournent sur B_0 . Ainsi, il n'est pas surprenant que l'onde R a une résonance à ω_c .

Dans le cas de l'onde ordinaire O (se propageant perpendiculairement à B_0), le vecteur de champ électrique est toujours parallèle à B_0 , c'est donc une onde plane polarisée. Le vecteur de champ électrique dans l'onde extraordinaire X (aussi se propage perpendiculairement à B_0) a deux composantes longitudinales et transversales (mais toujours perpendiculaire à B_0) qui sont phasés à 90° , comme on peut le voir à partir de l'équation (I.7). Toutefois, les amplitudes des deux composants ne sont pas les mêmes, alors l'onde est polarisée elliptiquement. Il devient polarisée linéairement, avec $E_1 \parallel k$ (longitudinal, électrostatique) à la résonance ω_h . Au-dessus et en dessous de la résonance, le sens de rotation du vecteur de champ électrique dans l'onde X change de signe.

I.2.2.3 La fréquence de coupure de l'onde L :

Nous avons :

$$\omega_L^2 + \omega_L \omega_c - \omega_p^2 = 0 \quad (\text{I.37})$$

Qui a la solution :

$$\omega_L = \left[-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2} \right] / 2 \quad (\text{I.38})$$

Que nous avons trouvée avant comme une coupure de l'onde extraordinaire. (Le signe \pm est obtenu avant le terme de la racine carrée pour résoudre l'équation quadratique. Mais comme $\omega > 0$, nous devons prendre le signe +). Notez que ω_c ne joue aucun rôle particulier dans les ondes L. Ceci est à prévoir, car les électrons tournent autour du champ magnétique dans le sens de droite (dans la nomenclature que nous utilisons ici), donc il n'y a pas de résonance pour les ondes L.

Cependant, pour $\omega_p \ll \omega_c$, la coupure $\omega_L \approx \omega_p (\omega_p / \omega_c)$ peut-être à une fréquence suffisamment faible que la dynamique des ions, que nous avons ignoré jusqu'ici, peut devenir importante.

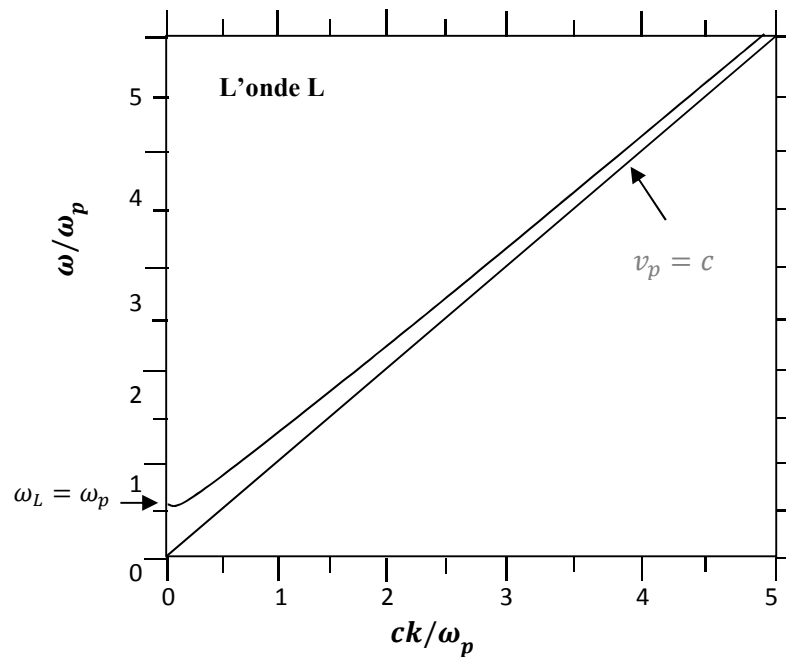


Figure I.2. Onde électromagnétique polarisée circulairement à gauche se propageant parallèlement à B_0 dans un plasma magnétisé, avec ω_c^2 choisie égale à $2\omega_p^2$

Il est intéressant maintenant de regarder les courbes de ω par rapport à k pour les ondes R et L. Commençant par les plus simples des ondes L, illustré dans la figure (I.2). Ce qui correspond à la solution de l'équation (I.36) avec le signe + dans le dénominateur. Pour le cas tracé, nous avons choisi $\omega_c^2 / \omega_p^2 = 2$, bien que ce rapport puisse prendre n'importe quelle valeur, en fonction des paramètres du plasma. Cette onde a évidemment une courbe de dispersion simple. Il se propage avec $v_p > c$ et $v_g < c$ (nécessairement) pour toute fréquence supérieure

à la fréquence de coupure ω_L . C'est un peu comme l'onde électromagnétique en absence d'un champ B_0 , qui est cependant coupée à $\omega = \omega_p$ (Comme dans le cas de l'onde O).

I.2.2.4 La fréquence de coupure de l'onde R :

Nous avons :

$$\omega_R = \left[\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2} \right] / 2 \quad (I.39)$$

Que nous avons également trouvé avant comme une coupure de l'onde extraordinaire. Dans ce cas aussi, le signe + avant le terme de la racine carrée doit être avoir un $\omega > 0$. Nous notons que $\omega_R > \omega_c$ (contrairement au cas de ω_L), la dynamique d'ion ne peut donc pas être importante pour cette coupure.

Maintenant, nous obtenons une résonance à $\omega = \omega_c$. Une résonance, comme nous pouvons le voir ici, a $\omega / k \rightarrow 0$, où : $\tilde{n} = ck / \omega \rightarrow \infty$, car $k \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0$, comme dans le cas de la résonance hybride supérieure de la propagation de l'onde extraordinaire perpendiculaire à B_0 . Dans ce cas, la fréquence de résonance était : $\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$, et le terme de fréquence plasma est entré parce que l'onde comprime les électrons, et donc génère une force de rappel électrostatique. Le terme de la fréquence cyclotronique est venu de la force de Lorentz, ce qui provoque cette résonance perpendiculaire à être affectée par le champ magnétique, contrairement à l'oscillation de Langmuir. Dans ce cas, comme l'onde transversale se propageant parallèlement à B_0 a $k \cdot E = 0$, il n'y a pas de compression d'électrons ou d'accumulation de densité de charge, et donc pas de ω_p^2 à la fréquence de résonance. Cependant, pour $k \parallel B_0$ et les ondes polarisées circulairement à droite, la fréquence cyclotronique électronique se pénètre fortement.

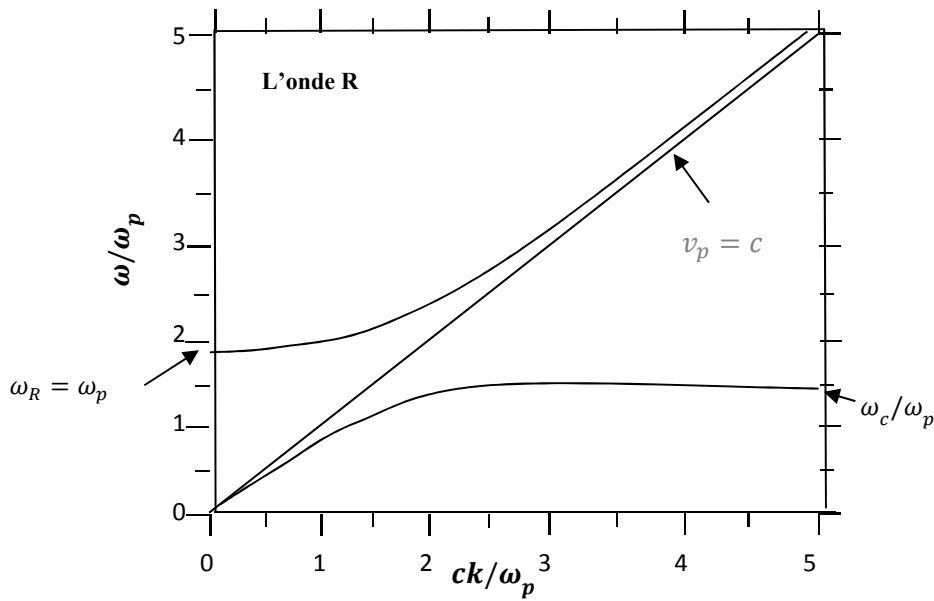


Figure I.3. Onde électromagnétique polarisée circulairement à droite, se propageant parallèlement à B_0 dans un plasma magnétisé, avec ω_c^2 choisie égale à $2\omega_p^2$.

Les courbes de ω par rapport à k de l'onde R est plus compliqué, à cause de la résonance ω_c , comme le montre la figure (I.3). Nous avons à nouveau choisi de tracer le cas où : $\omega_c^2/\omega_p^2 = 2$, nous trouvons une coupure à ω_R donnée lorsque : $k = 0$ dans la relation de dispersion avec le signe inférieur, ce qui nous donne une équation quadratique pour le ω_R .

Une caractéristique particulièrement intéressante pour les courbes de ω par rapport à k pour l'onde R est la présence d'une nouvelle onde dans la région de $\omega < \omega_c$. La partie de basse fréquence de l'onde R est appelée l'onde « siffleur » [15]. Dans le domaine de fréquence très inférieure ω_c , trouvée dans le coin inférieur gauche de la figure (I.3), la vitesse de groupe augmente avec la fréquence.

Une autre caractéristique intéressante des courbes de dispersion d'ondes L et R est que, si nous choisissons une fréquence dans la bande supérieure de l'onde R, il a toujours une vitesse

de phase supérieure de celle de l'onde L correspondante. Ceci peut être vu en examinant les figures (I.2) et (I.3), en particulier la comparaison de la valeur k correspondante à la même valeur de ω (choix de la bande de fréquence supérieure de la figure (I.3)). Pour raison, lorsque l'énergie de haute fréquence polarisée linéairement se propage parallèlement à B_0 , l'angle de polarisation tourne lorsqu'elle se déplace. C'est ce qu'on appelle : la rotation de Faraday [16].

I.3 Etude des ondes électromagnétiques à basse fréquence dans un plasma magnétisé :

Dans cette partie, nous investiguons les classes d'ondes qui deviennent disponibles aux basses fréquences à cause du mouvement des ions. Ces ondes ont un intérêt pratique et théorique considérable. Cependant, les équations deviennent beaucoup plus complexes avec la dynamique des ions et des électrons. Il est donc utile d'introduire un formalisme général dans lequel le plasma a soit un tenseur complexe d'une conductivité électrique dispersive, soit, plus classiquement, un tenseur complexe d'une réponse diélectrique dispersive. Cela nous permet d'unifier toutes les ondes que nous avons examinées : les ondes X et O dans la direction perpendiculaire, les ondes électrostatiques et les ondes R et L dans la direction parallèle, en utilisant un seul formalisme valable pour tous les angles de propagation.

I.3.1 Le tenseur diélectrique :

Avant d'analyser la propagation des ondes à basses fréquences où le mouvement d'ions doit être pris en compte, il est utile de prendre un aperçu de ce que nous avons fait dans le calcul des relations de dispersion. Ce faisant, nous pouvons généraliser nos résultats pour inclure le mouvement d'ions, la pression finie et un angle arbitraire de propagation.

Premièrement, nous écrivons l'équation de fluide linéaire de mouvement, où nous ne serons pas spécifiques encore aux ions ou aux électrons :

$$mn_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = qn_0(\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) - \gamma T \nabla n_1 \quad (\text{I.40})$$

Nous avons pris B_0 dans la direction z , et le vecteur k dans les directions x et z . Dans la mesure où k forme un angle avec B_0 , cela se voit comme k_x . L'analyse de Fourier [17] des trois composantes de cette équation de manière habituelle, et sa division par n_0 , nous donne :

$$-i\omega m u_{x1} = q(E_{x1} + u_{y1} B_0) - ik_x \gamma T n_1 / n_0 \quad (\text{I.41})$$

$$-i\omega m u_{y1} = q(E_{y1} - u_{x1} B_0) \quad (\text{I.42})$$

$$-i\omega m u_{z1} = qE_{z1} - ik_z \gamma T n_1 / n_0 \quad (\text{I.43})$$

L'équation de continuité est : $\nabla \cdot (n_0 n_1) = -\partial u_1 / \partial t$, qui devient :

$$ik_x u_{x1} + ik_z u_{z1} = \frac{i\omega n_1}{n_0} \quad (\text{I.44})$$

Nous définissons θ d'être l'angle entre k et B_0 , de sorte que : $k_x = k \sin \theta$ et $k_z = k \cos \theta$. Puis nous avons :

$$n_1 / n_0 = (k / \omega) (u_{x1} \sin \theta + u_{z1} \cos \theta) \quad (\text{I.45})$$

Ceci peut être utilisé pour remplacer n_1 / n_0 dans les équations (I.41) et (I.43) ci-dessus, de sorte que nous avons ensuite trois équations pour les composantes inconnues de u_1 en termes de composants d'équations E_1 . Les équations (I.41) et (I.43) deviennent :

$$-i\omega m u_{x1} = q(E_{x1} + u_{y1} B_0) - i(k^2 / \omega) \gamma T (u_{x1} \sin^2 \theta + u_{z1} \sin \theta \cos \theta) \quad (\text{I.46})$$

$$-i\omega m u_{z1} = q(E_{z1} - i(k^2 / \omega) \gamma T (u_{x1} \sin^2 \theta + u_{z1} \sin \theta \cos \theta)) \quad (\text{I.47})$$

Les équations (I.42), (I.46) et (I.47) forment un ensemble d'équations linéaires pour les composantes de u_1 . Ils peuvent être résolus pour donner à chacun de ces composantes, une combinaison linéaire des composantes de E_1 . En combinant les vitesses de fluide pour former

un courant électrique j_1 , ce résultat peut être exprimé comme un tenseur de conductivité électrique $\underline{\sigma}$ dépendant de la fréquence complexe :

$$j_1 = \sum n_0 q u_1 = \underline{\sigma} \cdot E_1 \quad (\text{I.48})$$

Où la sommation est faite sur les espèces et $\underline{\sigma}$ est une quantité de tenseur. Ce tenseur de conductivité [18] peut être substitué dans l'équation d'onde pour construire une relation de dispersion. Réitérant l'équation d'onde :

$$k^2 E_1 - k(k \cdot E_1) = (\omega^2/c^2)[E_1 + i j_1/(\epsilon_0 \omega)] \quad (\text{I.49})$$

Nous obtenons :

$$k^2 E_1 - k(k \cdot E_1) = (\omega^2/c^2)(I + i \underline{\sigma}/\epsilon_0 \omega) \cdot E_1 \quad (\text{I.50})$$

Où : I est le tenseur d'identité ou la matrice avec la diagonale principale et des zéros ailleurs. Il est plus conventionnel de travailler en fonction d'un tenseur diélectrique, en remplaçant la constante diélectrique scalaire usuel dans l'équation de propagation de l'onde dans un milieu non dispersif, diélectrique isotrope :

$$k^2 E_1 - k(k \cdot E_1) = \omega^2 \underline{\mu} \cdot E_1 \quad (\text{I.51})$$

Ainsi, dans le cas du plasma, nous avons un tenseur diélectrique, noté $\underline{\epsilon}$, donné par :

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_0 (I + i \underline{\sigma}/\epsilon_0 \omega) \quad (\text{I.52})$$

Où nous avons utilisé : $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Dans la limite à basse fréquence pour un plasma froid, nous verrons plus loin que les éléments diagonaux de ce tenseur diélectrique correspondant aux directions perpendiculaires à B_0 sont que la constante perpendiculaire du plasma diélectrique $\epsilon_{\perp} = \epsilon_0 + \rho/B^2$.

Puisque, nous utilisons la notation de tenseur, nous ré-exprimons le côté gauche de l'équation d'onde en notation tenseur :

$$k^2 X \cdot E_1 \equiv [k^2 E_1 - k(k \cdot E_1)]$$

Où : X est le tenseur défini par l'équation, de sorte que : $X = I - kk/k^2$. nous avons choisi :

$k_y = 0$, donc $k = k\sin\theta\hat{x} + k\cos\theta\hat{z}$, on peut voir que :

$$kk/k^2 = k = (\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z})(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z})$$

Donc :

$$\begin{aligned} X \equiv & (\hat{x}\hat{x}\cos^2\theta + 0 - \hat{x}\hat{z}\sin\theta\cos\theta) \\ & + 0 + \hat{y}\hat{y} + 0 \\ & - (\hat{z}\hat{x}\sin\theta\cos\theta + 0 + \hat{z}\hat{z}\sin^2\theta) \end{aligned} \quad (I.53)$$

Par conséquent, l'équation (I.53) est écrite d'une manière qui permet d'afficher clairement les éléments de la matrice correspondants. Notre équation d'onde est juste :

$$(\omega^2\mu_0\underline{\epsilon} - k^2X) \cdot E_1 = 0 \quad (I.54)$$

La relation de dispersion est ensuite dérivée par l'exigence que le déterminant de la quantité de tenseur entre parenthèses dans l'équation (I.54) est nul.

Pour les équations du mouvement que nous avons examiné, y compris la pression de plasma fini, ce qu'on appelle parfois la relation de dispersion de plasma «chaud». Si nous avons pris $T = 0$ dans ces équations, nous aurons obtenu la relation de dispersion de plasma "froid" qui est une généralisation des relations de dispersion que nous avons examiné dans la partie précédente, y compris le mouvement des ions et l'angle arbitraire de propagation. La nomenclature «à chaud» est habituellement utilisée pour les calculs entièrement cinétiques, y compris les effets des classes de particules qui se déplacent à des vitesses proches de la vitesse de phase de l'onde. Par ailleurs, en regardant précédemment aux équations (I.42), (I.46) et (I.47) que $\underline{\sigma}$ (et donc $\underline{\epsilon}$) ne contient pas de vecteur d'onde k sauf dans les termes $T \neq 0$. Dans la relation de dispersion de plasma froid alors, nous voyons que le vecteur d'onde k entrant que par le terme k^2 dans l'équation (I.54), avec sa direction entrant seulement à travers X . Les termes

supplémentaires de k entrant dans un plasma chaud permettent des nouvelles solutions de la relation de dispersion, telle que l'onde acoustique ionique qu'il n'existent pas du tout dans un plasma froid, ainsi que des modifications d'ondes par le mouvement de compression et par des effets de rayon de Larmor finis [19], lorsque kr_L n'est pas petite. La relation de dispersion de plasma «chaud» totale correspond effectivement à tous les ordres supérieurs en k .

I.3.2 La relation de dispersion du plasma froid :

On peut carrément calculer les composants de la matrice de l'équation (I.54) pour le cas d'un plasma froid. Il est plus facile si nous utilisons les définitions conventionnelles suivantes :

$$\tilde{n} \equiv ck/\omega = c/v_p$$

$$ck/\omega \equiv \tilde{n}\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \tilde{n}\cos\theta\hat{\mathbf{z}}$$

$\omega_p, \Omega_p \equiv$ Les fréquences de plasma électronique et ionique

$\omega_c, \Omega_c \equiv$ Les fréquences cyclotron ionique et électronique

$$R \equiv 1 - (\omega_p^2/\omega)/(\omega - \omega_c) - (\Omega_p^2/\omega)/(\omega + \Omega_c)$$

$$L \equiv 1 - (\omega_p^2/\omega)/(\omega + \omega_c) - (\Omega_p^2/\omega)/(\omega - \Omega_c)$$

$$S \equiv (R + L)/2$$

$$D \equiv (R - L)/2$$

$$P \equiv 1 - \omega_p^2/\omega^2 - \Omega_p^2/\omega^2$$

L'équation (I.54) multipliée par c^2/ω^2 , elle devient :

$$\begin{aligned}
 & [\hat{x}\hat{x}(S - \tilde{n}^2 \cos^2 \theta) - \hat{x}\hat{y}iD + \hat{x}\hat{z}\tilde{n}^2 \sin \theta \cos \theta \\
 & + \hat{y}\hat{x}iD + \hat{y}\hat{y}(S - \tilde{n}^2) + 0 \\
 & + \hat{z}\hat{x}\tilde{n}^2 \sin \theta \cos \theta + 0 + \hat{z}\hat{z}(P - \tilde{n}^2 \sin^2 \theta)] \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (I.55)
 \end{aligned}$$

De nouveau, nous avons arrangé les termes pour afficher les éléments de la matrice.

Posant le déterminant à zéro, on obtient :

$$(S - \tilde{n}^2 \cos^2 \theta)(P - \tilde{n}^2 \sin^2 \theta) - \tilde{n}^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (S - \tilde{n}^2) - D^2(P - \tilde{n}^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (I.56)$$

En première vue, on remarque que cela ressemble à une équation du sixième ordre pour k , à n'importe quel θ et ω . Heureusement que les termes \tilde{n}^6 s'annulent, il ne reste que les termes \tilde{n}^0 , \tilde{n}^2 et \tilde{n}^4 . Cela signifie que nous avons une quadratique en \tilde{n}^2 , que nous pouvons résoudre facilement. Rassemblant les termes par leurs ordres de \tilde{n} , nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 & (S^2 P - D^2 P) - \tilde{n}^2 (SP \cos^2 \theta + SP \cos^2 \theta + SP + S^2 \sin^2 \theta - D^2 \sin^2 \theta) \\
 & + \tilde{n}^4 (P \cos^2 \theta + S \sin^2 \theta) = 0 \quad (I.57)
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation quadratique pour \tilde{n}^2 . Ainsi, pour toute valeur ω, θ et des paramètres plasma, il y a de plus deux solutions réelles positives pour k , correspondant aux deux «branches» de la relation de dispersion, nous avons étudié la propagation parallèle (R et L) et la propagation perpendiculaire (X et O). Tous les termes sin et cos peuvent être simplifiés, par la relation de dispersion du plasma froid. Remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \sin^2 \theta$, en utilisant : $S^2 - D^2 = RL$, nous obtenons :

$$RLP - \tilde{n}^2 [(2SP + (RL - SP) \sin^2 \theta) + \tilde{n}^4 [P + (S - P) \sin^2 \theta]] = 0 \quad (I.58)$$

Donc:

$$RLP - 2\tilde{n}^2 SP + \tilde{n}^4 P = \tilde{n}^2 (RL - SP) \sin^2 \theta - \tilde{n}^4 (S - P) \sin^2 \theta$$

On obtient :

$$\sin^2 \theta = \frac{-P(\tilde{n}^4 - 2S\tilde{n}^2 + RL)}{\tilde{n}^4(S-P) + \tilde{n}^2(SP - RL)} \quad (I.59)$$

Pour aller plus loin vers une forme utile de la relation de dispersion $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ dans l'équation (I.58), on obtient :

$$RLP - \tilde{n}^2[SP + RL + (SP - RL) \cos^2 \theta] + \tilde{n}^4[S + (P - S) \cos^2 \theta] = 0 \quad (I.60)$$

Nous obtenons, alors :

$$\cos^2 \theta = \frac{S\tilde{n}^4 - (PS + RL)\tilde{n}^2 + PRL}{\tilde{n}^4(S-P) + \tilde{n}^2(PS - RL)} \quad (I.61)$$

Nous pouvons maintenant diviser l'équation (I.61) sur l'équation (I.59) pour obtenir :

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(\tilde{n}^4 - 2S\tilde{n}^2 + RL)}{S\tilde{n}^4 - (PS + RL)(\tilde{n}^2 + PRL)} \quad (I.62)$$

En utilisant le fait que $2S = (R + L)$ dans le numérateur, le numérateur et le dénominateur peuvent être désormais pris en compte pour donner :

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(\tilde{n}^2 - R)(\tilde{n}^2 - L)}{(S\tilde{n}^2 - RL)(\tilde{n}^2 - P)} \quad (I.63)$$

L'équation (I.63) est une forme très utile pour la relation de dispersion du plasma froid et il fournit une bonne compréhension de la physique. Tout d'abord, pour la propagation parallèle ($\theta = 0$), nous avons deux solutions $\tilde{n}^2 = R$ et $\tilde{n}^2 = L$, qui sont les ondes polarisées circulairement à droite et à gauche respectivement. Pour la propagation perpendiculaire, nous avons également deux racines, $\tilde{n}^2 = P$ (l'onde ordinaire) et $\tilde{n}^2 = RL/S$ (l'onde extraordinaire), maintenant avec la dynamique d'ion [20] incluse automatiquement dans les définitions de R , L , S et P . Les résonances peuvent être trouvés à partir de cette équation en fixant $\tilde{n} \rightarrow \infty$

($k \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0$), nous avons alors : $\tan^2 \theta = -P/S$. Ainsi, les fréquences de résonance varient en fonction de l'angle de propagation. Pour $\theta = 0$, ils se produisent lorsque $P = 0$ ou $S \rightarrow \infty$, le cas avec $P = 0$ est la résonance de plasma à ω_p . (Nous rappelons que l'oscillation de Langmuir a $\omega = \omega_p$ indépendante de k , pour un plasma froid). Le cas $S \rightarrow \infty$ peut être organisé par R ou

$L \rightarrow \infty$, qui se produisent aux résonances cyclotroniques électroniques et ioniques respectivement.

A $\theta = \pi / 2$, nous avons besoin de $P \rightarrow \infty$, qui ne peut se produire pour ω finie ou ω_p , aussi de $S \rightarrow 0$. Ce dernier donne les résonances hybrides supérieures et inférieures, y compris la dynamique des ions.

Pour obtenir les seuils à partir de cette équation n'est pas simple aussi, car le paramètre $\lambda \rightarrow \infty$, $\tilde{n} \rightarrow 0$ donne le résultat curieux que $-P R L / R L P = \tan^2 \theta$. Cela ne peut pas se produire pour un θ réel, sauf pour $P R L = 0$, un résultat qui peut être obtenu de manière plus explicite en revenant à l'équation (I.63), où nous pouvons voir que $\tilde{n} = 0$, qui implique que :

$P(S^2 - D^2) = P R L = 0$. Nous remarquons alors que les seuils ne varient pas avec θ , comme nous l'avons observé auparavant. Plus précisément, $P = 0$ est juste la coupure ω_p de l'onde ordinaire et la coupure / la résonance de l'oscillation de Langmuir.

Les cas $R = 0$ et $L = 0$ correspondent aux seuils ω_R et ω_L , avec la dynamique d'ion incluse.

I.3.3 L'onde d'Alfvén de cisaillement (Shear Alfvén Wave) :

Nous allons maintenant examiner le domaine des basses fréquences des ondes L et R. Comme précédemment, nous considérons une propagation purement parallèle à B_0 , c'est-à-dire : $k \parallel B_0$. Nous allons continuer à prendre $E_1 \perp B_0$ donc $E_1 \perp k$. C'est parce que le choix de $E_1 \parallel B_0 \parallel k$ à basse fréquence avec un plasma chaud, donne juste l'onde acoustique ionique comme nous avons étudié auparavant et que la force de Lorentz ne joue aucun rôle dans ce mode. Tout comme nous avons vu que l'onde de Langmuir électrostatique est découplée avec des ondes purement électromagnétiques à haute fréquence, ainsi que l'onde acoustique ionique est découplée avec des ondes R et L à basse fréquence se propageant parallèlement à B_0 dans

les modes ω que nous les envisageons, et comme $B_0 \parallel z$, $E_{z1} = U_{z1} = 0$. En examinant les équations de mouvement (équations (I.42), (I.46) et (I.47)), nous voyons que T ne joue aucun rôle dans ces modes. En conséquence, les vitesses u_{x1} et u_{y1} pour les électrons même pour la pression finie sont les mêmes que ceux donnés dans l'équation (I.42), nous avons d'abord examiné le cas où $u_{x1} \neq 0$ et $u_{y1} \neq 0$. Pour les ions, nous utilisons simplement l'équation (I.42) avec $e \rightarrow -e$, $\omega_c \rightarrow -\Omega_c$ et $m \rightarrow M$ (Nous rappelons que $\omega_c \equiv -q_e B / m_e$, tandis que

$\Omega_c \equiv +q_i B / m_i$. Nous avons alors pour les ions :

$$\begin{aligned} u_{xi1} &= \frac{-(e/M)(i\omega E_{x1} - \Omega_c E_{y1})}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} \\ u_{yi1} &= \frac{-(e/M)(i\omega E_{y1} - \Omega_c E_{x1})}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Pour les électrons, nous supposons que $\omega \lesssim \Omega_c \ll \omega_c$, dans ce cas, le fluide d'électrons présente la dérive pure $E_1 \times B_0$:

$$\begin{aligned} u_{xe1} &= \frac{(e/m)E_{y1}}{\omega_c} = \frac{eE_{y1}}{M\Omega_c} \\ u_{ye1} &= \frac{-(e/m)E_{x1}}{\omega_c} = \frac{-eE_{x1}}{M\Omega_c} \end{aligned} \quad (1.65)$$

La dernière étape dans les équations ci-dessus a été motivée par le désir d'exprimer les fréquences en termes de quantités d'ions, et elle met un facteur commun de e / M dans les deux équations d'ions et d'électrons. Le tenseur de conductivité est alors donné par :

$$j_1 = \frac{n_0 e^2}{M} \left[\frac{-i\omega}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} \hat{x}\hat{x} + \left(\frac{\Omega_c}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} - \frac{1}{\Omega_c} \right) \hat{x}\hat{y} - \left(\frac{\Omega_c}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} - \frac{1}{\Omega_c} \right) \hat{y}\hat{x} - \frac{i\omega}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} \right] \cdot E_1 \quad (1.66)$$

Notant que le tenseur de conductivité est réduit à une 2×2 tenseur pour l'onde d'Alfvén

de cisaillement se propageant parallèlement à B_0 , parce que nous avons pris

$J_{z1} = E_{z1} = 0$. Si nous prenons : $\omega \rightarrow 0$, les éléments hors diagonale vont à zéro en tant que ω_2 , tandis que les éléments en diagonale atteignent zéro en tant que ω , on obtient ainsi un tenseur de conductivité purement scalaire (mais imaginaire). Utilisons : $\Omega_p^2 \equiv n_0 e^2 / M \epsilon_0$, de sorte que le premier facteur sur le côté droit de l'équation (I.66) est juste $\epsilon_0 \Omega_p^2$, cette conductivité scalaire devient :

$$\sigma = -i\omega n_0 e^2 / M \Omega_c^2 = -i\omega \epsilon_0 \Omega_p^2 / \Omega_c^2 \quad (I.67)$$

Nous pouvons aussi voir ce qu'il donne lieu à une réponse diélectrique à faible fréquence. Nous rappelons l'équation (I.47) qui est $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 (I + i\underline{\sigma} / \epsilon_0 \omega)$, nous obtenons alors :

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_0 (1 + \Omega_p^2 \Omega_c^2) = \epsilon_0 + n_0 M / B^2 \quad (I.68)$$

Qui est tout simplement la constante diélectrique que nous avons déduit de la dérive de polarisation. Retournant à ω fini, dans le cas général, la relation de dispersion est donnée par :

$$\| \omega^2 \mu_0 \underline{\epsilon} - K^2 X \| = 0 \quad (I.69)$$

Les barres verticales indiquent le déterminant de la matrice équivalente. En fonction de $\underline{\sigma}$, et si en multipliant par c^2 / ω^2 , nous obtenons :

$$\| I - \bar{n}^2 X + i\underline{\sigma} / \epsilon_0 \omega \| = 0 \quad (I.70)$$

Pour $\theta = 0$, nous avons : $X = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}$. Dans ces calculs, on n'a pas trouvé la composante $\hat{z}\hat{z}$ de $\underline{\sigma}$, mais cela n'a pas d'importance puisque la matrice que nous avons construit pour le cas de $k \parallel B_0$ contient des éléments non nuls dans la zone 2×2 supérieure gauche et une seule composante potentiellement non nulle dans le coin inférieur droit. Les autres éléments de $\underline{\sigma}$. Ainsi, la partie supérieure gauche de la matrice 2×2 doit avoir le déterminant zéro (La relation de dispersion que nous recherchons) ou l'élément dans le coin inférieur droit,

correspondant purement à la dynamique $E \parallel B$, doit être zéro (l'onde de Langmuir dans les hautes fréquences et l'onde acoustique ionique à faible fréquence, pour les plasmas chauds) pour que la matrice entière ait le déterminant zéro.

Ainsi, pour le cas qui nous intéresse ici ; $E_1 \perp B_0$. Nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} 1 - \tilde{n}^2 + \Omega_p^2/(\Omega_c^2 - \omega^2) & i\Omega_p^2\omega/[\Omega_c(\Omega_c^2 - \omega^2)] \\ -i\Omega_p^2\omega/[\Omega_c(\Omega_c^2 - \omega^2)] & 1 - \tilde{n}^2 + \Omega_p^2/(\Omega_c^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (I.71)$$

La symétrie de cette matrice rappelle les ondes R et L à la propagation parallèle et à haute fréquence. Donc :

$$1 - \tilde{n}^2 + \frac{\Omega_p^2}{(\Omega_c^2 - \omega^2)} = \pm \frac{\Omega_p^2\omega}{\Omega_c(\Omega_c^2 - \omega^2)} \quad (I.72)$$

Et encore une fois, nous avons une polarisation circulaire des ondes L et R et nous pouvons voir cela parce que E_{x1} et E_{y1} sont égaux en grandeur et en dehors de phase $\pi/2$, par les mêmes arguments précédentes. Pour voir cela, nous devons tout simplement reconstruire les équations linéaires qui proviennent de la matrice représentée dans l'équation (I.71) avec E_1 et en fixant le résultat à zéro. Compte tenu de l'équation (I.72), les termes multipliant E_{x1} et E_{y1} diffèrent d'un facteur de $\pm i$.

En recherchant une approche de la relation de dispersion plus compacte, on obtient :

$$\tilde{n}^2 = c^2k^2/\omega^2 = 1 + \frac{\Omega_p^2\Omega_c \pm \Omega_p^2\omega}{\Omega_c(\Omega_c^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c(\Omega_c \pm \omega)} = \frac{\Omega_c^2 + \Omega_p^2 \pm \Omega_c\omega}{\Omega_c(\Omega_c \pm \omega)} \quad (I.73)$$

Les signes supérieurs vont avec une polarisation droite (ondes R), alors que les signes les plus inférieures vont avec polarisation gauche (ondes L).

Ainsi, pour l'onde R, divisant en haut et en bas par Ω_c , nous avons :

$$\tilde{n}^2 = c^2 k^2 / \omega^2 = \frac{\Omega_c + \Omega_p^2 / \Omega_c + \omega}{(\Omega_c - \omega)} \quad (\text{I.74})$$

L'onde d'Alfvén de cisaillement R n'a pas de seuils et aucune résonance dans ce domaine de basse fréquence, puisque ni le numérateur, ni le dénominateur peuvent aller à zéro. Cela n'est pas surprenant, puisque le mouvement d'ions est à gauche. Comme nous montons en fréquence, l'onde d'Alfvén de cisaillement R se passe bien sûr dans le siffleur, qui a sa résonance à $\omega = \omega_c$. A la fin de basse fréquence, nous avons une onde lumineuse «simple» se propageant dans un milieu avec une grande constante diélectrique. Comme $\omega \rightarrow 0$, l'équation (I.74) donne un indice de réfraction :

$$\tilde{n}^2 = \left(1 + \Omega_p^2 / \Omega_c\right)^{1/2} \quad (\text{I.75})$$

Et une vitesse de phase :

$$v_p = \omega / k = c / \tilde{n} = c \left(1 + \Omega_p^2 / \Omega_c\right)^{-1/2} \quad (\text{I.76})$$

Si nous définissons une «vitesse d'Alfvén», v_A , par :

$$v_A \equiv c \Omega_c / \Omega_p = c(eB/M) / (ne^2 / \epsilon_0 M)^{1/2} = cB / \sqrt{nM / \epsilon_0} = B / \sqrt{\mu_0 nM} \quad (\text{I.77})$$

La vitesse de phase s'écrit :

$$v_p = c / (1 + c^2 / v_A^2)^{1/2}$$

Multipliant en haut et en bas par v_A / c , puis en prenant $v_A / c = \Omega_c / \Omega_p \ll 1$ (ce qui est juste pour $\omega_p = \omega_c$), nous avons :

$$v_p = v_A c / (1 + v_A^2 / c^2)^{1/2} \approx v_A \quad (\text{I.78})$$

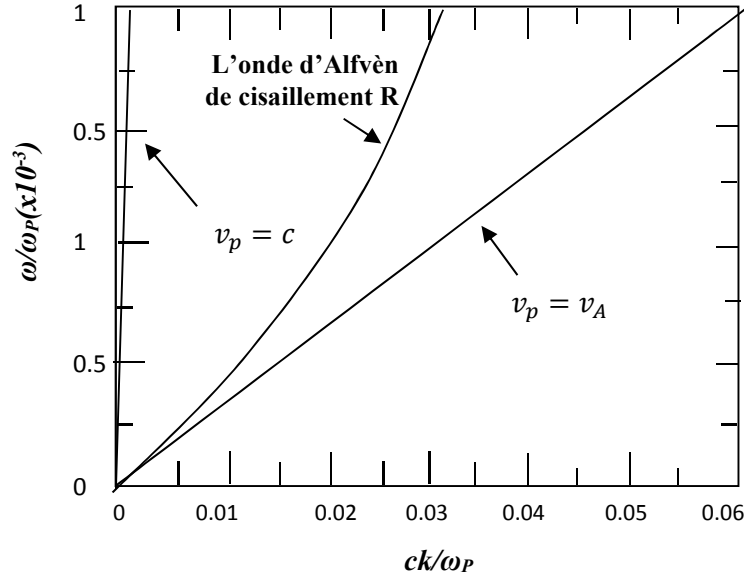


Figure I.4. Relation de dispersion pour l'onde d'Alfvén de cisaillement R, avec $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$.

La figure (I.4) montre deux courbes de la fréquence ω par rapport à k pour l'onde d'Alfvén de cisaillement R. Comme précédemment, nous choisissons : $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$ et nous allons également choisir $M / m = 1837$. Cela corrige les quantités dans l'équation (I.74).

Par exemple :

$$v_p/c = \Omega_c/\Omega_p = \left(\frac{\Omega_c}{\omega_c}\right)\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)\left(\frac{\omega_p}{\Omega_p}\right) = \left(\frac{1}{1837}\right)\sqrt{1837} = \sqrt{2}/\sqrt{1837} = 0.033$$

Afin de permettre la comparaison avec les courbes précédentes à haute fréquence, nous utilisons les mêmes axes sans dimensions, mais dans le but de voir ces nouveaux résultats, nous devons redimensionner les axes et les deux axes doivent être mis à l'échelle différemment les uns des autres, puisque ω / k est maintenant $\sim c/30$.

L'onde d'Alfvén de cisaillement gauche (ondes L) a la relation de dispersion :

$$\tilde{n}^2 = c^2 k^2 / \omega^2 = \frac{\Omega_c + \Omega_p^2 / \Omega_c - \omega}{(\Omega_c - \omega)} \quad (I.79)$$

Qui est montré dans la figure (I.4) ci-dessus. Cela a le même comportement à basse fréquence que l'onde R. Aux basses fréquences, les ondes d'Alfvén de cisaillement polarisées existent, et ne subissent pas à la rotation de Faraday. Les ondes L, cependant, ont clairement une résonance à $\omega = \Omega_c$, associée au mouvement cyclotronique ionique gauche. En outre, Ils ont une coupure à $\omega = \omega_L = \Omega_c + \Omega_p^2 / \Omega_c$. Cela ne semble pas être le même ω_L que nous avons rencontré dans notre calcul à haute fréquence, cependant, il est en fait la même coupure L, tout calculé en supposant que ω est faible, et donc les termes différents peuvent être ignorés.

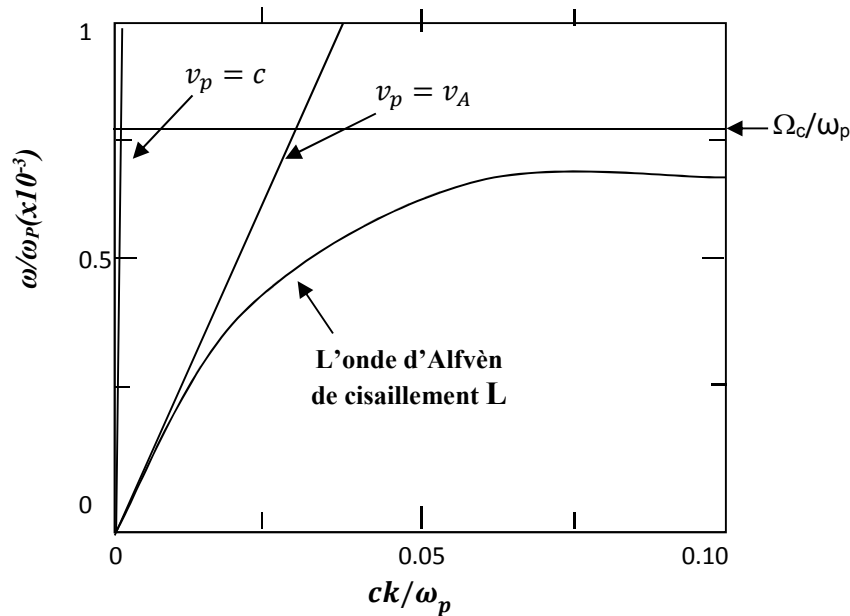


Figure I.5. Relation de dispersion pour l'onde d'Alfvén de cisaillement L, avec $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$.

Les définitions complètes des ω_L et ω_R comprenant à la fois les effets ioniques et électroniques et ne supposons rien d'avance sur leurs amplitudes qu'ils peuvent dérivées en posant : $L = 0$ ou $R = 0$ respectivement, en utilisant les définitions générales pour R et L données

précédemment dans ce chapitre. Si nous prenons $\Omega_c \ll \omega_c$ et $\Omega_p \ll \omega_p$ qui sont toujours justifiés pour un plasma d'ions-électrons, nous obtenons :

$$\omega_R^2 - \omega_R \omega_c - \omega_c \Omega_c - \omega_p^2 = 0 \quad (\text{I.80})$$

Et

$$\omega_L^2 + \omega_L \omega_c - \omega_c \Omega_c - \omega_p^2 = 0 \quad (\text{I.81})$$

Dans le domaine des hautes fréquences, le troisième terme est négligeable (et nous n'avons pas l'inclure dans l'équation (I.38), et dans le domaine des basses fréquences (le calcul actuel), le premier terme a été négligé. Il n'y a pas de solution de basse fréquence positive ω_R , et donc pas de coupure de basse fréquence à droite. Pour certaines combinaisons de paramètres du plasma. Cependant, ω_L peut se situer dans le domaine de basse fréquence, et notre relation de dispersion de cisaillement d'Alfvén donnera le seuil à peu près au bon endroit. Cependant, cette coupure se situe habituellement (pour ω_p de l'ordre ω_c) dans un domaine des fréquences où le mouvement des électrons doit être pris en compte au-delà la dérive $E_1 \times B_0$, de sorte que le calcul actuel sera inexacte. Par exemple, pour les paramètres que nous avons choisi dans nos courbes : $\omega_L = 0,37$ et $\omega_c = 0,51\omega_p$, de sorte que le calcul précédent à haute fréquence est plus proche de la bonne valeur de coupure donnée dans l'équation (I.81). Les termes d'ions négligés dans le calcul précédent sont beaucoup plus petits et ses approximations étaient donc satisfaisantes. Il est important d'être clair que pour un champ de densité magnétique donné, il n'y a qu'un seul ω_L et une fréquence de coupure de ω_R qui peut être calculée à partir des équations complètes pour ω_L et ω_R ci-dessus. Donc, ce sont des ondes d'Alfvén de cisaillement.

Dans le domaine de plus basses fréquences ($\omega \ll \Omega_R$), les ions et les électrons ont la dérive $E_1 \times B_0$, et les ions ont une dérive simple de polarisation à basse fréquence, ce qui est faible par rapport à leur dérive $E_1 \times B_0$. Les lignes de champ magnétique aussi se déplacent

avec la même vitesse ; $v_{\perp} = E_1 \times B_0 / B^2$; comme nous l'avons vu, ceci est décrit comme le plasma étant «gelé» aux lignes de champ, et nous l'avons rencontré auparavant pour un faible phénomène de fréquence. Dans le cas présent, les lignes de champ se déplacent par un mouvement de torsion (rotation) circulaire dans le plan (x,y), avec différentes phases de rotation le long de z. Ainsi le nom de « cisaillement » ou parfois « torsion » pour les ondes d'Alfvén. La torsion des lignes de champ éloigne la configuration magnétique de son état énergétique le plus bas, et l'énergie magnétique est stockée dans la torsion. Les ions fournissent l'inertie pour cette onde en provoquant les lignes de champ de continuer à se déplacer circulairement, plutôt que de venir au repos. Le mouvement de torsion du mode d'onde d'Alfvén de cisaillement a

$\nabla \cdot u_1 = 0$, donc il n'y a pas de compression, pas de pression perturbée p_1 , et donc pas d'effet de pression sur les ondes.

Maintenant, nous avons terminé notre étude des ondes se propageant parallèlement à B_0 , c'est à dire avec $k \parallel B_0$. Dans la première partie, nous avons eu une curieuse asymétrie entre l'onde L et l'onde R. L'onde R a deux bandes passantes, avec le siffleur étant la bande de fréquence inférieure, mais l'onde L n'avait qu'une seule bande passante. Maintenant que nous avons inclus le mouvement d'ions, nous trouvons une autre bande passante pour l'onde L au-dessous de la fréquence cyclotronique ionique. Nous rappelons que la polarisation circulaire gauche résonne avec un mouvement d'ion de Larmor.

Ainsi, le tableau total pour $k \parallel B_0$ et $\theta = 0$ dans un plasma froid est comme suit :

ONDE R $(E_1 \perp B_0, k \parallel B_0)$ (2 bandes passantes) :

$\omega > \omega_R$ Bande passante à haute fréquence

$v_p \rightarrow c$ comme $\omega \rightarrow \infty$.

$\omega > \omega_c$ L'onde siffleur qui devient l'onde d'Alfvén de cisaillement R à basse fréquence.

$$v_p \rightarrow v_A \text{ comme } \omega \rightarrow 0.$$

ONDE L ($\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$) (2 bandes passantes) :

$\omega = \omega_L$ Bande passante à haute fréquence

$$v_p \rightarrow c \text{ comme } \omega \rightarrow 0.$$

$\omega = \Omega_c$ L'ondes d'Alfvén de cisaillement L

$$v_p \rightarrow v_A \text{ comme } \omega \rightarrow 0.$$

Oscillation de Langmuir ($\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$) :

$\omega = \omega_p$ L'oscillation de Langmuir à vitesse de groupe zéro

v_p est indéfini.

Pour une température finie ($\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$) :

$\omega = \omega_p$ L'onde de Langmuir

$$v_p \rightarrow \sqrt{3v_{t,e}} \text{ comme } \omega \rightarrow \infty.$$

$\omega = \Omega_p$ L'onde sonore d'ion

$$v_p \rightarrow C_s \text{ comme } \omega \rightarrow \infty.$$

Les bandes passantes des ondes R et L à haute fréquence deviennent des ondes lumineuses simples à vide et à très haute fréquence. Dans le domaine des hautes fréquences, ils ont une différence de vitesse de phase qui provoque la rotation de Faraday des ondes polarisées. À toutes les fréquences, dans le cas parallèle ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$), les ondes R et L sont entièrement

transversales, ($E_1 \parallel B_0$), et n'ont donc ni les flux, ni les champs électriques le long de B_0 . Elles sont complètement moins compressées, et ne donnent lieu à aucune perturbation de la densité des particules, ni la densité de charge, et donc elles ne sont pas affectées par les effets de la pression finie. En revanche, l'oscillation de Langmuir est entièrement électrostatique et B_1 est exactement zéro de sorte que les effets physiques qui viennent des effets des ions différentiels et des effets de compression des électrons, donnent naissance à une charge perturbée directement, σ_1 . Dans la limite de plasma froid, il y a juste une oscillation à ω_p . Les effets de plasma chaud entraînent la propagation de l'onde de Langmuir et l'onde acoustique ionique.

Si nous prenons le calcul d'un plasma chaud dans la limite de $T_e, T_i \rightarrow 0$, l'onde de Langmuir se réduit à $\omega = \omega_p$, et l'onde acoustique ionique disparaît dans l'axe horizontal à $\omega = 0$.

I.3.4 L'onde magnéto-sonique :

La dernière classe des ondes dont nous devons discuter concerne des ondes à basse fréquence se propageant perpendiculairement à B_0 . Ceux-ci peuvent être divisés en deux catégories d'ondes extraordinaires (X) et ordinaires (O). L'onde X possède son champ électrique orienté partout perpendiculaire à B_0 donnant lieu à des phénomènes «extraordinaires» en raison de la force de Lorentz, tandis que l'une des ondes est «ordinaire» avec $E_1 \parallel B_0$.

Et comme l'une des ondes n'existent pas dans ce domaine des fréquences. Il a été coupé à $\omega = \omega_p$, et sans force de Lorentz, la dynamique d'ion ne peut pas le ramener à basse fréquence. Ainsi, nous n'avons que l'onde X à analyser.

L'onde X est délicate lorsque la dynamique d'ion est incluse. Cependant, il y a des phénomènes intéressants de l'onde X à une fréquence de l'ordre de $\sqrt{\omega_c \Omega_c}$, donc nous devons être prudents dans l'ordre de ω par rapport aux deux fréquences cyclotron si nous voulons récupérer tous les comportements importants. En particulier. Pour cette onde, nous devons inclure le courant d'électrons dans la direction de E_1 (courant de polarisation) dans l'approximation $\omega \ll \omega_c$. Pour l'onde d'Alfvén de cisaillement. Nous avons négligé le courant d'électrons le long de la diagonale de $\underline{\sigma}$, tout à fait par rapport au courant d'ions. Aux basses fréquences, ceci est valable (Le rapport est de M/m), mais à des fréquences plus élevées, nous devons être prudents. Dans la perspective de l'équation (I.37) (où nous avons mis dans le courant de polarisation d'électrons), nous pouvons voir que la contribution du courant de polarisation ionique le long de la diagonale pour $\omega \gg \Omega_c$ est d'environ de Ω_p^2/ω^2 , alors que la contribution de la dérive de polarisation électronique pour $\omega \ll \omega_c$ est ω_p^2/ω_c^2 . La définition de ceux-ci soient comparable en magnitude donne $\omega^2 \sim \omega_c^2 (\Omega_p^2/\omega_p^2)$ où : $\omega \sim \sqrt{\omega_c \Omega_c}$. Ainsi, dans le domaine de fréquence de cette «hybride inférieure» (c-à-d la fréquence de l'ordre $\sqrt{\omega_c \Omega_c}$). Nous ne pouvons pas négliger le courant de la polarisation électronique [21], que nous avons fait pour l'onde d'Alfvén de cisaillement. Autre que l'on ajoute ce terme supplémentaire. Le déterminant que nous devons résoudre est seulement changé les équations (I.70) et (I.71) par le fait que le tenseur X donné dans l'équation (I.55) doit maintenant être évalué pour $\theta = \pi/2$, ce qui nous donne : $X = \hat{y}\hat{y} + \hat{x}\hat{x}$. Nous avons encore besoin d'évaluer uniquement la partie supérieure gauche 2 x 2 partie de $\underline{\sigma}$ parce que, pour cette géométrie de la propagation d'onde et la polarisation du champ électrique, dans la troisième rangée et la colonne, seul le coin inférieur est potentiellement non nul. L'élément déterminant est :

$$\begin{vmatrix} 1 + \Omega_p^2/(\Omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2/\omega_c^2 & i\Omega_p^2\omega/[\Omega_c(\Omega_c^2 - \omega^2)] \\ -i\Omega_p^2\omega/[\Omega_c(\Omega_c^2 - \omega^2)] & 1 - \tilde{n}^2 + \Omega_p^2/(\Omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2/\omega_c^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (I.82)$$

L'équation (I.82) est très semblable à l'équation (I.71). Cependant, comme \tilde{n}^2 n'apparaît pas deux fois ici, nous n'obtiendrons pas deux ondes, mais uniquement une onde X. Nous avons retenu la dynamique des électrons suffisamment pour récupérer les seuils ω_R et ω_L de l'onde X dans ce déterminant, mais ce n'est pas le sujet qui nous intéresse ici.

Ici, nous sommes intéressés à la dynamique de basse fréquence et à la résonance hybride inférieure qui forme le fond de la bande d'arrêt entre l'onde extraordinaire ionique et l'onde X à haute fréquence. La relation de dispersion peut être écrite :

La relation de dispersion peut être écrite :

$$\tilde{n}^2 \left(\frac{\Omega_c^2 - \omega^2 + \Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \right) = \left(\frac{\Omega_c^2 - \omega^2 + \Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_p^2 \omega}{\Omega_c (\Omega_c^2 - \omega^2)} \right)^2 \quad (\text{I.83})$$

Comme la résonance est l'endroit où $k \rightarrow \infty$ et $\tilde{n} \equiv ck/\omega$, le terme entre crochets sur le côté gauche doit aller à zéro à la résonance. (Rien qui se passe dans la limite du plasma froid à $\omega = \Omega_c$, mais la théorie des plasmas chauds introduit les ondes de Bernstein ionique [22] à toutes les harmoniques de Ω_c). Le premier terme entre parenthèses sur le côté droit sera également zéro, mais le second terme doit être bien comporté. Ainsi et par une multiplication croisée, on obtient des résonances où :

$$\omega_p^2 (\Omega_c^2 - \omega^2) + \omega_c^2 (\Omega_c^2 - \omega^2 + \Omega_p^2) = 0 \quad (\text{I.84})$$

Où :

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 \Omega_c^2 + \omega_c^2 \Omega_c^2 + \omega_c^2 \Omega_p^2}{\omega_p^2 + \omega_c^2} \quad (\text{I.85})$$

Les premier et troisième termes du numérateur ne diffèrent que par leurs dépendances de masse. Plus précisément, le premier terme du numérateur est m/M fois le troisième terme

et il est donc négligeable par rapport à celui-ci. Pour se conformer à la notation conventionnelle, nous multiplions le haut et le bas par m / M . et obtenir

$$\omega^2 = \omega_{1h}^2 = \frac{\omega_c \Omega_c (\Omega_c^2 + \Omega_p^2)}{\Omega_p^2 + \Omega_c \omega_c} \quad (I.86)$$

Ou encore plus classiquement (en prenant $\Omega_c^2 \gg \Omega_p^2$, ce qui est le cas si $\omega_p^2 \approx \omega_c^2$:

$$\omega_{1h}^{-2} = \Omega_p^{-2} + (\Omega_c \omega_c)^{-1} \quad (I.87)$$

Ici, ω_{1h} est appelée la fréquence hybride inférieure.

Nous traçons la relation de dispersion pour l'onde X à basse fréquence dans la figure (I.6) ((Pour notre cas de $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$). Notons que dans la limite de $\omega \rightarrow 0$, on retrouve la relation de dispersion des ondes d'Alfvén :

$$\tilde{n}^2 = 1 + \Omega_p^2 / \Omega_c^2 + \omega_p^2 / \omega_c^2 \approx 1 + \Omega_p^2 / \Omega_c^2 \quad (I.88)$$

Que nous pouvons obtenir à partir de l'équation (I.83). Cette faible fréquence d'onde X est généralement désignée comme « l'onde magnétosonique ». Notre dérivation explique clairement pourquoi il en est ainsi. Contrairement pour l'onde d'Alfvén de cisaillement ou de torsion, cette onde, parfois aussi appelée l'onde d'Alfvén de compression a un $k \cdot u_1$ fini, et ainsi « compresse » le plasma. Encore une fois, comme le plasma est « collé » aux lignes du champ aux fréquences plus basses considérées ici $\omega \ll \Omega_c$, le champ magnétique est également comprimé. L'onde se propage à travers le champ magnétique, alternativement la comprimant et la dilatant comme la pression dans une onde sonore, d'où le nom "magnétosonique"[23]. Si le plasma a une pression finie, cette onde est affectée par des termes de plasma chaud et sa vitesse de phase augmente. Pour mieux comprendre cela, nous allons maintenant calculer la relation de dispersion des ondes d'Alfvén dans la limite de très basse fréquence, en utilisant le tenseur diélectrique du plasma chaud. Cela va nous permettre de dériver des résultats pour un angle

arbitraire de propagation, θ , nous allons donc également examiner la limite à basse fréquence de l'onde d'Alfvén de cisaillement.

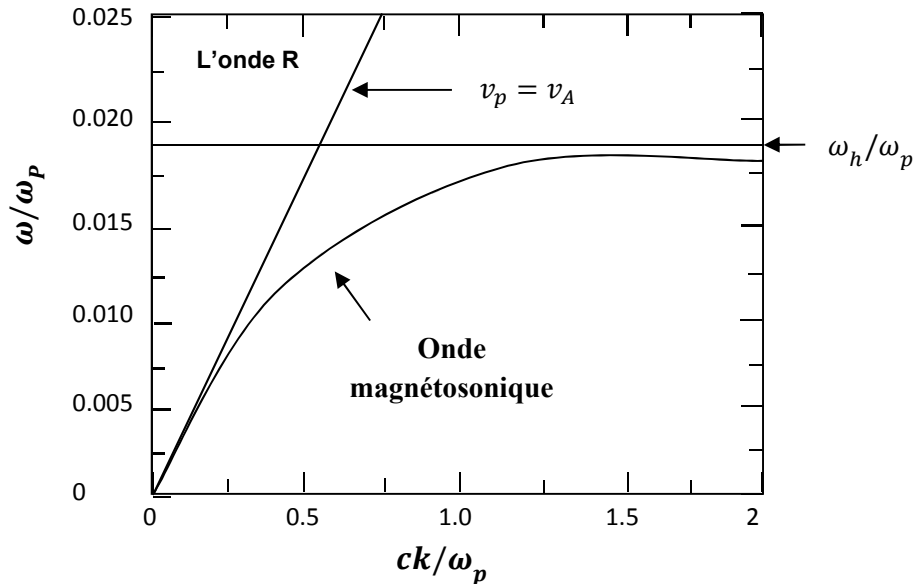


Figure I.6. Relation de dispersion pour l'onde magnétosonique dans la limite du plasma froid

$$\text{avec } \omega_c^2 = 2\omega_p^2.$$

I.3.5 Les ondes d'alfvèn à basse fréquence, T fini, l'angle arbitraire de propagation :

Pour étudier les ondes d'Alfvén dans la limite à basse fréquence ($\omega \ll \Omega_c$), y compris les effets du plasma chaud. Nous devons d'abord trouver le tenseur de conductivité $\underline{\sigma}$. Pour cela, nous reformulons les équations (I.42), (I.46) et (I.47) sous la forme d'un ensemble d'équations linéaires pour les vitesses fluide, la solution par des méthodes de la matrice, nous donne :

$$\begin{aligned}
E_{x1} &= -i \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \sin^2 \theta \right) u_{x1} - B_0 u_{y1} + \left(\frac{ik^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right) u_{z1} \\
E_{y1} &= B_0 u_{x1} - \frac{i\omega m}{q} u_{y1} \\
E_{z1} &= \left(\frac{ik^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right) u_{x1} - i \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) u_{z1}
\end{aligned} \tag{I.89}$$

Où nous n'avons pas encore précisé les espèces. Pour résoudre $\underline{\sigma}$ nous devons le déterminant des coefficients dans les équations (I.89), que nous noterons Δ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta &= i \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \sin^2 \theta \right) \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) \left(\frac{\omega m}{q} \right) \\
&\quad - i \left(\frac{ik^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right)^2 \left(\frac{\omega m}{q} \right) - i B_0^2 \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) \\
&\cong -i B_0^2 \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right)
\end{aligned} \tag{I.90}$$

La simplification finale vient de supposer que $\omega \ll \Omega_c$ et $kr_L \ll 1$. Ces approximations éliminent les différences entre les dérivées des ions et d'électrons $E_1 \times B_0$. Cela rend la relation de dispersion pour les ondes R et L identique, de sorte que, dans les limites des ondes d'Alfvén à basse fréquence peuvent être considérées comme des ondes polarisées linéairement ou circulairement à $\theta = 0$. Comme nous le verrons, dans le cas où θ peut prendre n'importe quelle valeur, il sera avantageux de considérer la polarisation est linéaire.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 u_{x1}\Delta &= E_{x1} \left(\frac{-\omega m}{q} \right) \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) - i E_{y1} B_0 \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) \\
 &\quad - E_{z1} \left(\frac{\omega m}{q} \right) \left(\frac{k^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right) u_{y1}\Delta = i E_{x1} B_0 \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) \\
 &\quad - E_{y1} \left[\left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \sin^2 \theta \right) \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \cos^2 \theta \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \sin \theta \cos \theta \right)^2 \right] + i E_{z1} B_0 \left(\frac{k^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right) \\
 u_{z1}\Delta &= -E_{x1} \left(\frac{-\omega m}{q} \right) \left(\frac{k^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right) - i E_{y1} B_0 \left(\frac{k^2}{\omega q} \gamma T \sin \theta \cos \theta \right) \\
 &\quad - E_{z1} \left[\left(\frac{\omega m}{q} \right) \left(\frac{\omega m}{q} - \frac{k^2 \gamma T}{\omega q} \sin^2 \theta \right) - B_0^2 \right] \tag{I.91}
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous allons utiliser $\mathbf{j} = \sum n_q \mathbf{q} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ et $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 I + i \underline{\sigma} / \omega$ pour obtenir le tenseur diélectrique. Toutefois, nous allons former explicitement la somme sur les espèces.

De nos précédents travaux, nous allons supposer que $\omega/k \sim v_A$. Si nous supposons $\beta_i (\equiv n_i T_i / (B^2 2 \mu_0)) \ll 1$, puis on peut déduire $v_{t,i} \ll v_A$ et $v_{t,e} \gg v_A$. Nous supposons également que $\beta_e \ll 1$, ce qui entraîne $C_s \ll v_A$, $\beta_e \gg m/M$ et $\epsilon_{\perp} = \epsilon_0 + n_0 M / B_0^2 \gg \epsilon_0$. Ces hypothèses vont simplifier les mathématiques. Nous allons donc démontrer que si $\beta_i \ll 1$ et $\beta_e \ll m/M$, puis $v_{t,i} \ll v_A$ et $v_{t,e} \gg v_A$. On retrouve les éléments suivants pour le tenseur diélectrique du plasma chaud à basse fréquence:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \epsilon_0 + \sum_s \frac{n_0 m}{B_0^2} \cong \epsilon_0 + \frac{n_{i0} M}{B_0^2} \cong \frac{n_{i0} M}{B_0^2} & \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0 \\
 \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \sum_s \frac{n_0 m}{B_0^2} \frac{k^2 \gamma T \sin \theta \cos \theta}{B_0^2 (\omega^2 m - k^2 \gamma T \cos \theta)} \\
 &\cong \frac{n_{i0} M}{B_0^2} \left(\frac{k^2 \gamma_i T_i \sin \theta \cos \theta}{\omega^2 M} \right) - \frac{n_{e0} m}{B_0^2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \cong \frac{n_{i0} M}{B_0^2} \left(\frac{k^2 \gamma_i v_{ti}^2 \sin \theta \cos \theta}{\omega^2} \right) \\
 \epsilon_{yy} &= \epsilon_0 + \sum_s \frac{n_0 m}{B_0^2} \frac{\omega^2 m - k^2 \gamma T}{\omega^2 m - k^2 \gamma T \cos \theta} \cong \frac{n_{i0} M}{B_0^2} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_i v_{ti}^2 \sin \theta}{\omega^2} \right) \\
 \epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} &\pm i \sum_s \frac{n_0 q}{\omega B_0} \frac{k^2 \gamma T \sin \theta \cos \theta}{(\omega^2 m - k^2 \gamma T \cos^2 \theta)} \\
 &\cong -i \frac{n_{e0} e}{\omega B_0} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) - i \frac{n_{e0} e}{\omega B_0} \left(\frac{k^2 \gamma_i v_{ti}^2 \sin \theta \cos \theta}{\omega^2} \right) - i \frac{n_{e0} e}{\omega B_0} \left(\frac{\omega^2 \sin \theta}{k^2 \gamma_e v_{te}^2 \cos \theta} \right) \\
 \epsilon_{zz} &\cong \epsilon_0 - \sum_s \frac{n q^2}{\omega^2 m - k^2 \gamma T \cos^2 \theta} = \epsilon_0 + \frac{n_{e0} e^2}{k^2 \gamma_e v_{te}^2 \cos^2 \theta} - \frac{n_{e0} e^2}{\omega^2 M} \\
 &\cong \frac{n_{e0} e^2 / m}{k^2 \gamma_e v_{te}^2 \cos^2 \theta} \tag{I.92}
 \end{aligned}$$

Pour calculer ϵ_{xx} , nous avons utilisé $M \gg m$. Pour $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, les courants associés aux dérivées d'ion et d'électron $E_1 \times B_0$ sont annulés. Pour $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$, nous avons utilisé $\beta_i \gg m/M$. Pour ϵ_{yy} , nous avons utilisé $M \gg m$. Pour ϵ_{zz} , nous avons utilisé $\beta_e \gg m/M$.

Dans tous les cas, nous sommes passé au premier ordre en $(v_{ti}/v_A)^2$ et $(v_A/v_{ti})^2$.

Si nous mettons maintenant l'équation d'onde, l'équation (I.92), dans une forme sans dimension.

Dans tous les cas :

$$\left\| \omega^2 \mu_0 \underline{\epsilon} / k^2 - X \right\| = 0 \tag{I.93}$$

Nous pouvons facilement évaluer l'ordre de chaque terme dans la matrice, en supposant que $\omega/k \sim v_A$, comme suit :

Terme xx:

$$O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{xx} / k^2 - \cos^2 \theta) = 1.$$

Termes xz, zx :

$$O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{xz} / k^2 + \sin \theta \cos \theta) = O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{zx} / k^2 + \sin \theta \cos \theta) = 1 \text{ (avec le terme de plasma de l'ordre de } (v_{t,i} / v_A)^2 \text{)}.$$

Terme yy:

$$O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{yy} / k^2 - 1) = 1 \text{ (avec le terme de correction de l'ordre } (v_{t,i} / v_A)^2 \text{)}.$$

Termes yz, zy :

$$O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{yz} / k^2) = O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{zy} / k^2) = \Omega_c / \omega \text{ (avec le terme de correction de l'ordre } (\Omega_c / \omega)(v_{t,i} / v_A)^2 \text{ et } (\Omega_c / \omega)(v_A / v_{t,e})^2 \text{)}.$$

Terme zz:

$$O(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{zz}^2 / k^2 - \sin^2 \theta) = (\Omega_c / \omega)^2 (v_A / C_S)^2 \text{ (avec un terme de correction de l'unité).}$$

Maintenant, nous pouvons évaluer l'ordre de chacun des termes qui composent le déterminant :

$$O[-(xx)(yy)(zz)] = (\Omega_c / \omega)^2 (v_A / C_S)^2 \text{ (avec un terme de correction de l'ordre } (\Omega_c / \omega)^2 \text{)}.$$

$$O[-(xx)(zy)(zx)] = 1 \text{ (avec un terme de correction de l'ordre } (v_{t,i} / v_A)^2 \text{)}.$$

$$O[-(xx)(zy)(yz)] = (\Omega_c / \omega)^2 \text{ (avec des termes de correction de l'ordre } (\Omega_c / \omega)^2 (v_{t,i} / v_A)^2 \text{)}$$

$$\text{et } (\Omega_c / \omega)^2 (v_A / v_{t,e})^2.$$

Clairement le second terme dans le déterminant peut être négligé par rapport aux autres.

Ainsi, la relation de dispersion que nous cherchons peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2 \mu_0 \epsilon_{xx} / k^2 - \cos^2 \theta) [(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{yy} / k^2 - 1)(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{zz} / k^2 - \sin^2 \theta)] \\
 & - (\omega^2 \mu_0 \epsilon_{yz} / k^2)^2 \epsilon_{yz} \epsilon_{zy} = 0
 \end{aligned} \tag{I.94}$$

Mettant le premier terme entre parenthèses égale à zéro pour nous obtenir l'onde d'Alfvén de cisaillement polarisée linéairement dans la limite à basse fréquence :

$$\omega = k v_A \cos \theta = k_{\parallel} v_A \tag{I.95}$$

Cela implique également que le seul champ électrique non nul est dans la direction x , donne lieu à une dérive $E_1 \times B_0$ dirigée vers y , puisque k est dans les directions x et z . L'équation (I.95) est la généralisation des ondes d'Alfvén de cisaillement à basse fréquence à un angle de propagation arbitraire. A basse fréquence, la nature non compressive de l'onde est préservée dans cette polarisation linéaire. Grâce à notre rapprochement des $kr_L \ll 1$, aucun effet du plasma chaud est respecté.

Si nous fixons le terme entre crochets dans l'équation (I.93) à zéro, nous obtiendrons E_y et E_z finis, le champ E_y donne lieu à la compression à travers la dérive $E_1 \times B_0$ dirigée vers x . Lorsqu'il y a k_z fini, il y aura un gradient de densité le long de B_0 . E_z différent de zéro parce que $v_{t,e} \gg v_p \gg v_{t,i}$ de telle sorte que les ions ne peuvent pas s'écouler dans le gradient de la densité et les électrons vont établir une distribution de Boltzmann [24] le long de B_0 , avec un E_z résultant. A cause de la grande taille de ϵ_{zz} , ce champ électrique est beaucoup plus petit que E_y , la relation de dispersion pour ce mode de compression à l'ordre le plus bas est :

$$\left[\frac{\omega^2 \mu_0 n_{i0} M}{k^2 B_0^2} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_i v_{ti}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2} \right) - 1 \right] \left(\frac{\omega^2 \mu_0 n_{i0} e^2 / m}{k^2 \gamma_e v_{te}^2 \cos^2 \theta} - \sin^2 \theta \right) = \frac{\omega^2 \mu_0^2 n_{e0} e^2 \sin^2 \theta}{k^4 B_0^2 \cos^2 \theta} \quad (I.96)$$

Si nous négligeons l'élément final à gauche $\sin^2 \theta$, comme il est petit d'un facteur de $(C_s/v_A)^2 (\omega/\Omega_c)^2$, on peut simplifier cette expression:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 \mu_0 n_{i0} M}{k^2 B_0^2} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_i v_{ti}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2} \right) - 1 &\cong \frac{\omega^2 \mu_{e0} m \gamma_e v_{te}^2 \sin^2 \theta}{B_0^2} \\ \frac{\omega^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_i v_{ti}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2} \right) &= \frac{B_0^2}{\mu_0 n_{i0} M} + \frac{m \gamma_e v_{te}^2 \sin^2 \theta}{M} \\ \frac{\omega^2}{k^2} &= v_A^2 + (\gamma_i v_{ti}^2 + \gamma_e C_s^2) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Ici $C_s^2 \equiv T_e / M$ Lorsque $\theta = 0$, il n'y a pas de compression du plasma et la température finie ne joue aucun rôle dans ce mode que nous avons observé précédemment lorsque nous avons examiné les ondes d'Alfvén se propageant parallèlement à B_0 . Notons que la vitesse de phase est indépendante de l'angle dans un plasma froid, mais elle augmente à mesure que l'onde s'éloigne du champ magnétique dans un plasma chaud. Car, pour plier les lignes de champ magnétique ne stocke pas plus d'énergie contenue dans le plasma sous pression contrairement à la compression. Il est encore plus clair maintenant pourquoi ce mode, l'onde d'Alfvén compressée est également appelée onde «magnétique + son» = «magnéto-sonique». Les valeurs appropriées à utiliser pour γ_e et γ_i dépendent des subtilités telles que l'angle de propagation précis de l'onde relative à B_0 (le plus petit angle loin de la perpendiculaire permet aux électrons d'être isothermes $\gamma_e = 1 = I$, car la vitesse de phase est supposée d'être petite par rapport à la vitesse thermique des électrons). La fréquence des ondes par rapport aux fréquences de collision ion-ion et électron-électron joue également un rôle dans la détermination de γ_e et γ_i .

I.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les ondes électromagnétiques dans un plasma magnétisé à haute puis à basse fréquence. Pour cela, nous avons le divisé en deux parties importantes : l'une est consacrée au traitement des ondes électromagnétiques à hautes fréquences dans laquelle, nous avons traité les ondes qui se propagent d'une manière perpendiculaire et parallèle à \mathbf{B}_0 , nous profitons donc l'occasion dans cette partie de comparer entre les seuils et les résonnances. Ensuite, dans l'autre partie, qui est consacré au traitement des ondes électromagnétiques à basses fréquences, nous avons étudié les classes des ondes qui deviennent disponibles à des fréquences inférieures. Ces ondes ont un intérêt théorique et pratique considérable, pour cela, nous considérons le plasma d'avoir soit un tenseur de conductivité électrique complexe dispersif ou plus classiquement, une réponse diélectrique de tenseur complexe dispersif. Ça nous a conduit d'unifier toutes les ondes étudiées ; les ondes électrostatiques X et O dans la direction perpendiculaire, les ondes R et L dans la direction parallèle, en utilisant un formalisme unique valable pour tous les angles de propagation.

I.5 Références :

- [1] Gedalin M, Phys. Rev. E, 47, 4354 (1993).
- [2] Grigor'ev I A and Pastukhov V P, Plasma Physics Reports, Vol. 34, No. 4, 265 (2008).
- [3] Tajima T, Mima K and Dawson J M, Phys. Rev. Lett., 39, 201 (1977).
- [4] Kundu R and White S M, Adv. Space Res. Vol 10, (9) 85 (1990).
- [5] Shay M A, Drake J F and Rogers B N, Geophys. Rev. Lett., Vol. 26, No. 14, 2163 (1999).
- [6] Amel Benahmed and Abdelaziz Sid. J. New Technol. Mater. Vol. 09, N°01, 107-112 (2019).
- [7] Amel Benahmed and Abdelaziz Sid. J. Phys. Conf. Ser. **1269** 012023(2019).
- [8] Slutz S A and Roger A. Vesey, Phys. Rev. Lett., 108, 025003 (2012).

- [9] Eric Delhaz et al. Géomagnétisme et dynamique des particules chargées, université de Liège (2000)
- [10] André thess et al. Theory of the Lorentz force, Phys. Rev. Lett., 9,299 (2007)
- [11] Pascal Bradu, Les plasmas, No 12, France (2010)
- [12] J.T. Mendonca, B. Zanafagna. Diffusion incohérente d'une onde électromagnétique à la fréquence hybride supérieure. Journal de Physique Lettres, Edp sciences, 1975, 36 (6), pp.165-167.
- [13] D. J. Gregoire, J. Santoru and R. W. Schumacker, Electromagnetic wave propagation in unmagnetized plasmas, Mallbu (1992).
- [14] Anders I. Eriksson, Waves in Space Plasmas, Sweden (2004)
- [15] Philippe Savoini, Introduction à la physique des plasmas, France (2011)
- [16] Kishore Padmaraju, Faraday rotation, Rochester, NY 14627
- [17] Sébastien Renaux-Petel. L'analyse de Fourier en physique, France (2015)
- [18] Anne Mangeney. Phys. Rev. Lett., Paris (1960)
- [19] Emmanuel Frénod et Eric Sonnendrucker. Phys. Rev. Lett., (2000)
- [20] Mathieu Marciate. Dynamique d'ions en pièges radiofréquences. Marseille (2011)
- [21] Djoudi Hakim, étude des courants d'absorption et de résorption dans du papier d'isolation, université de Tizi-Ouzou 2010.
- [22] Sabri Naima Ghoutia, Etude de la Propagation d'une Onde Electromagnétique dans un Plasma de Tokamak; thèse de doctorat, univ. Aboubakr Belkaid, Tlemcen (2009)
- [23] Jonathan Ferreira, Introduction aux plasmas magnétisés (MHD), Grenoble (2011)
- [24] Dario Camuffo, in Microclimate for Cultural Heritage (Second Edition, 2014)

CHAPITRE II :

DESCRIPTION CINETIQUE DU PLASMA

II. DESCRIPTION CINÉTIQUE DU PLASMA

II.1 Introduction	57
II.2 Détermination de l'équation de Liouville	58
II.3 Description de la densité de probabilité dans l'espace des phases	58
II.4 Description de l'équation d'évolution de la fonction $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$	60
II.5 Description d'un système sans interactions dépendant de la vitesse	61
II.6 Application de l'équation de Liouville au plasma	63
II.7 Détermination d'un système d'équations de BBGKY	64
II.8 L'équation de l'évolution de la fonction $f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$	65
II.9 L'équation de l'évolution de la fonction de distribution double $f_2(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_2, t)$	66
II.10 Les équations cinétiques d'un gaz pur	68
II.10.1 L'équation de Boltzmann	68
II.10.2 Description du modèle de collision BGK (Bhavnagar, Gross, Krook)	69
II.10.3 Description du modèle de collision Fokker-Planck	69
II.10.4 Description du modèle de Landau	70
II.10.5 L'opérateur de collision électron-ion	71
II.11 Conclusion	73
II.12 Références	74

II.1 Introduction :

La description d'un plasma en utilisant la théorie fluide est dans la plupart du temps insuffisante, et nécessite de prendre en compte la distribution des vitesses qui conduit à la description cinétique. Cette théorie décrit et prédit l'état du plasma à partir des interactions et des mouvements microscopiques de ses constituants. Elle fournit une base essentielle pour un cours d'introduction à la physique des plasmas ainsi que pour la théorie cinétique avancée.

La description cinétique du plasma traite aussi la relation entre les vitesses et les forces, ses équations nous aident à comprendre des outils simples pour déterminer la dynamique et la cinétique du plasma décrites dans ce chapitre. Les ondes du plasma, les oscillations, les fréquences et les applications sont ainsi les sujets de la théorie cinétique.

La physique des plasmas implique des phénomènes liés aux processus dynamiques en mécanique statistique. Il est donc très important d'étudier les propriétés et la structure des équations cinétiques de base régissant le comportement dynamique du plasma [1]. Le comportement dynamique d'un système de N particules en interaction est généralement étudié à l'aide de l'équation de Liouville. Une fonction de distribution microscopique pourrait être utilisée pour décrire le comportement d'un tel système. Le système de particules chargées peut ensuite être décrit par les équations de Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY). Ensuite une fonction de distribution appelée L'équation de Fokker-Planck est définie dans ce chapitre.

II.2. Détermination de l'équation de Liouville :

Comme le théorème de Liouville est le seul théorème qui permet de donner une description satisfaisante de l'évolution du fluide [1], il est donc facile de décrire l'évolution temporelle de la densité de probabilité $f(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N)$ dans l'espace des phases.

Avant de déterminer l'équation de Liouville, nous avons besoin d'une description de la densité de probabilité dans l'espace des phases.

II.3. Description de la densité de probabilité dans l'espace des phases :

Cette densité de probabilité est définie comme étant une probabilité pour que l'état du système soit représenté par un point à l'intérieur du volume Ω considéré. Si nous avons un système de N particules et nous considérons ces particules comme ponctuelles c'est-à-dire ; nous négligeons les phénomènes de rotation et de vibration, l'état du système à l'instant t sera défini par les vecteurs position et vecteurs vitesse respectivement pour chaque particule [2] comme :

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N = \vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N \quad (\text{II.1})$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N = \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N \quad (\text{II.2})$$

L'état microscopique du système est caractérisé par les $3N$ coordonnées spatiales $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N$ et les $3N$ composantes de sa vitesse $(\vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N)$.

Pour cela, on introduit ce qu'on appelle "l'espace des phases" du système défini comme un espace à $6N$ dimensions, par conséquent l'état microscopique du système sera spécifié par un point dans l'espace. La connaissance de la phase du système implique la connaissance des

$q_1, q_2 \dots q_{3N}$ et d'impulsion $p_1, p_2 \dots p_{3N}$, mais cela sera impossible pour des raisons pratiques (N très élevé).

Donc ; il est plus commode d'utiliser une fonction de la densité de probabilité f , en équilibre :

$$f(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N ; \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N) \quad (\text{II.3})$$

Hors d'équilibre, la densité de probabilité f devient :

$$f(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N ; \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N, t) = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N ; \vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N, t) \quad (\text{II.4})$$

Où :

$f(q_1 \dots q_{3N} ; p_1 \dots p_{3N}, t) dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}$: Représente la probabilité pour que la particule 1 se trouve à l'instant t à l'intérieur d'un petit élément de volume de l'espace ordinaire ; $d^3r_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ et possède un vecteur vitesse dont l'extrémité se trouve à l'intérieur d'un petit élément de volume de l'espace des vitesses ; $d^3v_1 = dv_{1x} dv_{1y} dv_{1z}$ et que la position de la particule 2 se trouve à l'intérieur de d^3r_2 et sa vitesse se trouve à l'intérieur d'un élément de volume dans l'espace des vitesses $d^3v_2 \dots$ jusqu'à la particule N .

On peut définir aussi la fonction de la densité de probabilité comme étant une probabilité pour que l'ensemble de N particules qui se trouvent dans l'élément de volume ordinaire ;

$d^3r = d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N$ possédants une vitesse dans l'élément de volume dans l'espace des vitesses ; $d^3v = d^3v_1 d^3v_2 \dots d^3v_N$ tel que la probabilité totale pour trouver le système dans un état quelconque, soit égale à l'unité :

$$\int f(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N ; \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N) d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N = \int f(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N ; \vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N d\vec{v}_1 \dots d\vec{v}_N \quad (\text{II.5})$$

$$\int f(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N; \vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N d\vec{v}_1 \dots d\vec{v}_N = 1 \quad (\text{II.6})$$

II.4. Description de l'équation d'évolution de la fonction $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$:

La fonction f peut s'écrire en fonction des variables canoniques conjugués (q_i, p_i) . L'équation qui régit l'évolution de cette fonction dans l'espace des phases est celle de « Liouville ». Dans l'espace des phases nous définissons un élément de volume par :

$$d\Omega = d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N \quad (\text{II.7})$$

Les équations du mouvement de Hamilton-Jacobi [1] s'écrivent :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

Considérons maintenant un élément de volume dans l'espace des phases $d\Omega(t_0)$ à l'instant t_0 et on suppose que l'état du système à l'instant t occupe un élément de volume $d\Omega(t)$. L'évolution de l'état du système est représentée par une trajectoire dans l'espace des phases.

Nous utilisons la propriété que deux trajectoires dans l'espace des phases ne se coupe jamais, on peut montrer que le théorème de "Liouville" exprime la conservation du volume de l'espace des phases lors de l'évolution du système, c'est-à-dire : $d\Omega(t_0) = d\Omega(t)$.

Alors ; la probabilité pour que le système se trouve dans $d\Omega(t)$ égale à celle que l'on avait à $t + dt$:

$$f(t + dt) d\Omega(t + dt) = f(t) d\Omega(t) \quad (\text{II.10})$$

Utilisant le théorème de Liouville [3] : $d\Omega(t + dt) = d\Omega(t)$, nous constatons que la conservation de la densité de probabilité est : $f(t + dt) = f(t)$. Alors ; la densité de probabilité se conserve suivant le mouvement $\frac{df}{dt} = 0$. Nous utilisons les dérivées partielles de $f(q_i, p_i)$ à l'instant t , nous obtenus :

$$df(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot dq_i + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot dp_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{df(q_i, p_i, t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Utilisons les équations du mouvement de Hamilton-Jacobi, on trouve finalement l'équation Liouville [3] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (\text{II.13})$$

II.5. Description d'un système sans interactions dépendant de la vitesse :

Nous allons maintenant donner l'expression de l'équation de Liouville en fonction des variables \vec{r}_i et \vec{v}_i . Pour cela, on suppose que les vitesses des particules sont faibles devant la vitesse de la lumière et toutes les forces agissantes sur ces particules sont indépendantes de la vitesse et dérivent des potentiels, on peut donc écrire l'hamiltonien du système de N particules [1] sous la forme :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{q}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{ij}(\vec{q}_i, \vec{p}_i) \quad (\text{II.14})$$

Avec : $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$ et $\varphi_i(\vec{q}_i)$: est l'énergie potentielle de la particule i .

$\varphi_{ij}(\vec{q}_i, \vec{p}_i)$: est l'énergie potentielle d'interaction des particules i et j .

Par dérivation, on obtient (par exemple) :

$$\frac{\partial H}{\partial p_{ix}} = v_{ix} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p_{ix}}{\partial t} \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_i} = X_i - \sum_{i \neq j} X_{ijx} = -\frac{\partial p_{ix}}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

$X_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ Représente des forces d'origine extérieure.

$X_{ijx} = -\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_i}$ Représente des forces d'interaction mutuelle entre la particule i et toutes les autres particules.

Donc, en désignant : $\vec{X}_i + \sum_{i \neq j} \vec{X}_{ij}$ par la force totale agissant sur la particule i .

Il suffit finalement de remplacer l'expression de cette force dans l'équation de Liouville, on peut l'écrire sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{X}_i}{m} + \frac{\sum_{i \neq j} \vec{X}_{ij}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_i} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Les sommations étant maintenant étendues aux N particules.

Notons que lorsque le gaz est en équilibre thermodynamique, on n'a pas besoin de cette équation. La mécanique statistique classique montre en effet que f est a priori connue par « La maxwellienne » [4], qui est égale à :

$$f = \frac{\exp\left(-\frac{E}{KT}\right)}{\int \exp\left(-\frac{E}{KT}\right) d\Omega} \quad (\text{II.19})$$

Où : E représente l'énergie totale du système dans l'état de phase considéré.

II.6. Application de l'équation de Liouville au plasma :

L'équation de Liouville peut se généraliser à un gaz des particules chargées (plasma), mais il faut alors tenir compte des forces électromagnétiques qui dépendent des vitesses. De sorte que la force totale $\vec{X}_i + \sum_{i \neq j} \vec{X}_{ij}$ agissant sur la particule i [1] s'écrit :

$$\vec{X}_i = q_i [\vec{E}_i + \vec{V}_i \cdot \vec{B}_i] \quad (\text{La force de Lorentz}) \quad (\text{II.20})$$

$\vec{X}_{ij} = -\nabla_i \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right]$ (La force d'interaction électrostatique entre la particule i et un ensemble des autres particules du plasma).

\vec{E}_i est le champ électrique macroscopique d'origine extérieure.

\vec{B}_i est le champ magnétique macroscopique self-consistant défini par l'équation :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \quad (\text{II.21})$$

Donc la force totale électromagnétique appliquée à la particule i donnée sous la forme suivante :

$$\vec{X}_i + \sum_{i \neq j} \vec{X}_{ij} = q_i \left[\vec{E}_i + \vec{E}'_i + \vec{V}_i \cdot (\vec{B}_i + \vec{B}'_i) \right] \quad (\text{II.22})$$

\vec{E}'_i et \vec{B}'_i sont les champs produits par les charges d'espaces et les courants dans le plasma.

Par conséquent, l'équation de Liouville pour un plasma est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} + \frac{q_i}{m} \sum_{i=1}^N \left[\vec{E}_i + \vec{E}'_i + \vec{V}_i \cdot (\vec{B}_i + \vec{B}'_i) \right] \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_i} = 0 \quad (\text{II.23})$$

II.7. Détermination d'un système d'équations de BBGKY :

La fonction $f(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots \vec{q}_N; \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N; t)$ contient le maximum d'information que l'on puisse avoir sur le plasma ; en fait, on ne peut jamais atteindre ce maximum et l'on doit se contenter d'une fonction décrivant l'état du plasma.

A partir de l'équation de Liouville, qui est déjà établie, on obtient un système de N équations couplées de proche en proche ; ce système est appelé système simplement de BBGKY (Born_Bogolioubov_Green_Kirkwood_Yvon) [5,6].

Nous définissons une nouvelle fonction de distribution dite la fonction de distribution réduite $f_s(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_s, \vec{p}_1 \dots \vec{p}_s, t)$ tel que :

$$f_s(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_s, \vec{p}_1 \dots \vec{p}_s, t) = V^s \int d\vec{q}_{s+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_{s+1} \dots d\vec{p}_N f(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N, \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N, t) \quad (\text{II.24})$$

Cette fonction signifie la probabilité de trouver la particule 1 dans l'élément de volume dans l'espace des phases $d\vec{q}_1 d\vec{p}_1 \dots$ jusqu'à la particule « s » quelque soit la position et l'impulsion des particules $s + 1 \dots N$

L'hamiltonien H (déjà établie) qui représente un système de N particules avec des interactions de paires en présence de forces extérieures et qui dérive un potentiel est :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{q}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{ij}(\vec{q}_i, \vec{p}_i) \quad (\text{II.25})$$

Dans l'absence d'un champ extérieur, l'hamiltonien H s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{ij}(\vec{q}_i, \vec{p}_i) \quad (\text{II.26})$$

Nous définissons l'opérateur suivant :

$$V^s \int d\vec{q}_{s+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_{s+1} \dots d\vec{p}_N \quad (\text{II.27})$$

Appliquons cet opérateur sur l'équation de Liouville :

$$V^s \int d\vec{q}_{s+1} \dots d\vec{q}_N d\vec{p}_{s+1} \dots d\vec{p}_N \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{q}_i} - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_i} \right) \right) = 0 \quad (\text{II.28})$$

Suite à un ensemble des opérations mathématiques, on trouve un système d'équation « la hiérarchie » dite BBGKY [5] s'écrit comme :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\vec{p}_i}{m} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{i=1}^s \vec{X}_i \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \vec{X}_{ij} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} - \sum_{i=1}^s n \int d\vec{q}_{s+1} d\vec{p}_{s+1} \vec{X}_{i,s+1} \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_i} = 0 \quad (\text{II.29})$$

\vec{X}_i : Représente la force appliquée par un champ extérieur sur la particule i .

\vec{X}_{ij} : Représente la force d'interaction entre la particule i et la particule j .

Pour un système de N particules n'interagissent pas entre elles (sans interaction de paire) ;

$\vec{X}_{ij} = 0$ et $\vec{X}_{i,s+1} = 0$. La hiérarchie BBGKY s'écrit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\vec{p}_i}{m} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{i=1}^s \vec{X}_i \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}_i} = 0 \quad (\text{II.30})$$

II.8. L'équation de l'évolution de la fonction $f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$:

Pour ($s = 1$) ; $f_s(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_s, \vec{p}_1 \dots \vec{p}_s, t) = f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$; qui est la fonction de distribution d'une seule particule.

$f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$: Représente la densité de probabilité que la particule 1 qui est située au voisinage de \vec{q}_1 et $\vec{q}_1 + d\vec{q}_1$ possède une vitesse comprise entre \vec{v}_1 et $\vec{v}_1 + d\vec{v}_1$ quelque soit la position et l'impulsion d'autres particules [7] $\vec{q}_2 \dots \vec{q}_N$ et $\vec{p}_2 \dots \vec{p}_N$.

L'équation de l'évolution de la fonction $f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} + \vec{X}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \int d\vec{q}_2 d\vec{p}_2 \vec{X}_{12} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} \quad (\text{II.31})$$

Si : $\vec{q}_1 = \vec{r}_1$ et $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, alors l'équation de l'évolution de la fonction $f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1} = \int d\vec{r}_2 d\vec{v}_2 \frac{\vec{X}_{12}}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{v}_1} \quad (\text{II.32})$$

C'est l'équation de l'évolution de la fonction de distribution d'une seule particule dans laquelle, la fonction f_1 est liée par la fonction f_2 . D'où :

$\frac{\partial f_1}{\partial t}$: Représente le gradient de la fonction de distribution dans l'espace ordinaire.

$\vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1}$: Représente le terme de diffusion.

$\frac{\vec{X}_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1}$: Exprime l'action des forces appliquées.

$\int d\vec{r}_2 d\vec{v}_2 \frac{\vec{X}_{12}}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{v}_1}$: Représente de façon non explicite l'influence des interactions entre les particules.

II.9. L'équation de l'évolution de la fonction de distribution double

$f_2(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_2, t)$:

$f_2(\vec{q}_1, \vec{q}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2, t)$: Représente la densité de probabilité pour que la particule 1 qui est située au voisinage de \vec{q}_1 et $\vec{q}_1 + d\vec{q}_1$ possède une vitesse comprise entre \vec{v}_1 et $\vec{v}_1 + d\vec{v}_1$ et la particule 2 qui est située au voisinage de \vec{q}_2 et $\vec{q}_2 + d\vec{q}_2$ possède une vitesse comprise entre

\vec{v}_2 et $\vec{v}_2 + d\vec{v}_2$ quel que soit la position et la vitesse des autres particules. Alors l'équation d'évolution de la fonction double [7] s'écrit :

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}_1} + \vec{v}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}_2} + \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_{12}}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_{12}}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \vec{v}_2} = \int d\vec{r}_3 d\vec{v}_3 \frac{\vec{x}_{13}}{m} \frac{\partial f_3}{\partial \vec{v}_1} + \int d\vec{r}_3 d\vec{v}_3 \frac{\vec{x}_{23}}{m} \frac{\partial f_3}{\partial \vec{v}_2} \quad (\text{II.33})$$

Dans la première équation (L'équation de l'évolution de la fonction $f_1(\vec{q}_1, \vec{p}_1, t)$), on ne peut pas déterminer la fonction f_1 si on connaît pas f_2 et dans la deuxième équation, on ne peut pas déterminer f_2 si on connaît pas f_3 et aussi pour déterminer f_3 , il faut déterminer $f_4 \dots$ etc.

Alors les deux équations forment un système d'équations indéterminé. On peut trouver un système de N équation simple mais couplé de proche en proche c'est la hiérarchie « BBGKY ». Alors, pour pouvoir utiliser cette hiérarchie, il faut l'arrêter à un stade quelconque. Pour cela nous faisant des hypothèses simples pour l'une des fonctions de distribution.

Les Approximation utilisées sur la hiérarchie « BBGKY » sont l'origine des équations cinétiques qui sont :

- L'équation de Boltzmann sans seconde membre.
- L'équation de Boltzmann.
- L'équation de Fokker-Planck.
- L'équation de Landau.

II.10. Les équations cinétiques d'un gaz pur :

II.10. 1. L'équation de Boltzmann :

Historiquement et en 1872, Boltzmann est le premier physicien qui a établi une équation cinétique de l'évolution de la fonction de distribution pour des gaz classiques dilués [8], plus tard après l'approximation de la hiérarchie BBGKY en 1947 et par un ensemble des considérations et des approximations, on peut trouver cette équation à partir de la hiérarchie BBGKY suivant ces hypothèses [1] :

1. La densité du gaz est assez faible pour qu'on puisse négliger les termes d'interaction triple.
2. Nous supposons que les forces d'interaction entre les particules sont de faible portée.
3. On suppose que les forces ne dépendent pas de la vitesse.
4. On suppose qu'à l'intérieur de sphère d'interaction, les forces extérieures sont faibles.
5. On suppose que la variation temporelle $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial r}$ sont assez lente.
6. On suppose qu'au moment où les deux particules pénétrées dans la sphère de collision, il n'y a pas de corrélation.

Alors, l'équation de Boltzmann d'évolution f en présence des collisions binaires s'écrit [8] :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} = C(f_1) = \int d\vec{V}_2 \int E d\Omega |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| (\hat{f}_1 \hat{f}_2 - f_1 f_2) \quad (\text{II.34})$$

Avec l'opérateur de collision $C(f_1) = \int d\vec{V}_2 \int E d\Omega |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| (\hat{f}_1 \hat{f}_2 - f_1 f_2)$

II.10.2. Description du modèle de collision BGK (Bhavnagar, Gross, Krook):

Ce modèle exprime la relaxation vers une distribution locale d'équilibre $f_{\alpha 0}$ et il s'applique aux collisions électron-neutre ou ion-neutre, car la fréquence de collision ν_{α} est supposée constante.

Donc, l'opérateur de collision de Boltzmann est devenu une forme simple dite la forme de BGK

[10] :

$$C(f_{\alpha}) = \nu_{\alpha}(f_{\alpha 0} - f_{\alpha}) \quad (\text{II.35})$$

Où :

$$\nu_{\alpha} = \frac{n_{\alpha} e^4 Z \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_{\alpha}^2 v_{th,\alpha}^2} \text{ est la fréquence de collision.}$$

$f_{\alpha 0}$ est la fonction de distribution à l'équilibre.

Donc l'équation collisionnelle [10] s'écrit :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = \nu_{\alpha}(f_{\alpha 0} - f_{\alpha}) \quad (\text{II.36})$$

II.10.3. Description du modèle de collision Fokker-Planck :

Dans un plasma complètement ionisé, les interactions coulombiennes lointaines sont d'importance prédominante, on ne peut plus utiliser l'équation de Boltzmann habituelle. Donc nous utilisons l'équation de Fokker-Planck, on peut dériver cette équation par différentes façons ; soit à partir de l'équation de Boltzmann, soit à partir de l'équation de Liouville [11].

La forme standard de l'opérateur de Fokker-Planck est :

$$C_{\alpha\beta}(f_{\alpha}, f_{\beta}) = \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\alpha}} \left(-f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{\alpha}} H_{\alpha\beta}(\vec{v}_{\alpha}) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_{\alpha}^2 \partial \vec{v}_{\alpha}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_{\alpha}^2 \partial \vec{v}_{\alpha}^2} G_{\alpha\beta}(\vec{v}_{\alpha}) f_{\alpha} \right) \right] \quad (\text{II.37})$$

L'équation de Fokker-Planck est donnée par :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = \sum_\beta \Gamma_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} \left(-f_\alpha \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} H_{\alpha\beta}(\vec{v}_\alpha) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_\alpha \partial \vec{v}_\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{v}_\alpha \partial \vec{v}_\alpha} G_{\alpha\beta}(\vec{v}_\alpha) f_\alpha \right) \right] \quad (\text{II.38})$$

Tel que :

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{m_\alpha} \right]^2 \ln \Lambda$$

$$H_{\alpha\beta}(\vec{v}_\alpha) = \frac{m_\alpha + m_\beta}{2} \int \frac{f_\beta(\vec{v}_\beta)}{|\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta|} d^3 v_\beta$$

$$G_{\alpha\beta}(\vec{v}_\alpha) = \int |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta| f_\beta(\vec{v}_\beta) d^3 v_\beta$$

II.10.4. Description du modèle de Landau :

Le modèle de Landau est une application de l'équation de Boltzmann sur le plasma avec les collisions lointaines dominantes. Nous partons du terme de collision de Boltzmann :

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha) = \int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g \sigma(\chi, \varphi) d\Omega d v_\beta \quad (\text{II.39})$$

Dans un plasma cinétique classique, les collisions lointaines sont dominantes, alors on peut négliger les collisions proches c'est-à-dire que les variations des vitesses $\Delta \vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha - \vec{v}_\alpha$ et $\Delta \vec{v}_\beta = \vec{v}'_\beta - \vec{v}_\beta$ sont faibles, donc on développe f'_α et f'_β en série de Taylor et on les remplace dans l'intégrale de Boltzmann et suivant un ensemble des calculs, nous obtenons la formule établie par Landau pour les collisions lointaines de faible angle de déviation [12]:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) &= \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} \left[\frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{2} \int \vec{G}_{\alpha\beta} \left(\frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial \vec{v}_\beta} - \frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} \right) d^3 v_\beta \right] \\ &= \frac{\Gamma_{\alpha\beta}}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} \left[\int \left(\frac{\vec{U}^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3} \right) \left(f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha} - \frac{m_\alpha}{m_\beta} f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial \vec{v}_\beta} \right) d^3 v_\beta \right] \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Le tenseur $\vec{G}_{\alpha\beta}$ est défini par : $\vec{G}_{\alpha\beta} = \frac{\vec{U}U^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3}$ et $\vec{U} = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta$

Et :

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{m_\alpha} \right]^2 \ln\Lambda \quad (\text{Système d'unité internationale (S.I)}) \quad (\text{II.41})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = 4\pi \left[\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{m_\alpha} \right]^2 \ln\Lambda \quad (\text{Système d'unité Gaussien (S.G)}) \quad (\text{II.42})$$

Où : Λ représente le logarithme coulombien égal au rapport entre le maximum et le minimum du facteur d'impact :

$$\Lambda = \frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{\lambda_D}{\frac{e^2}{3T}} = \frac{3T\lambda_D}{e^2} \quad (\text{II.43})$$

Alors :

$$\ln\Lambda = \ln\left(\frac{3T\lambda_D}{e^2}\right) \quad (\text{II.44})$$

II.10.5. L'opérateur de collision électron-ion :

Pour un plasma complètement ionisé, l'équation cinétique des électrons [12] est :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_e + \frac{q_e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = \sum_\beta C_{\alpha\beta}(f_\alpha) = C_{ee}(f_e) + C_{ei}(f_e) \quad (\text{II.45})$$

Avec :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{\Gamma_{ei}}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\int \left(\frac{\vec{U}U^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3} \right) \left(f_i \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} - \frac{m_e}{m_i} f_e \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}_i} \right) d^3 v_i \right] \quad (\text{II.46})$$

Lorsque nous allons faire une approximation sur la masse des ions c'est-à-dire, pour une grande masse des ions, on peut admettre la condition $\left(\frac{m_e}{m_i} \rightarrow 0\right)$. Donc :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{\Gamma_{ei}}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\int \left(\frac{\vec{I}U^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3} \right) f_i \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} d^3 v_i \right] = \frac{\Gamma_{ei}}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} \int \left(\frac{\vec{I}U^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3} \right) f_i d^3 v_i \quad (\text{II.47})$$

Lorsque nous allons faire une approximation sur la vitesse des ions c'est-à-dire, à cause de leur grande inertie, nous négligeons la réponse des ions, donc nous négligeons la vitesse des ions devant la vitesse des électrons nous écrivons :

$$\vec{U} = \vec{v}_e - \vec{v}_i \approx \vec{v}_e .$$

Par conséquent le terme de collision ($e-i$) s'écrit :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{\Gamma_{ei}}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} \left(\frac{\vec{I}U^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3} \right) \int f_i d^3 v_i = \frac{\Gamma_{ei}}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} \left(\frac{\vec{I}v_e^2 - \vec{v}_e \vec{v}_e}{v_e^3} \right) \int f_i d^3 v_i \right] \quad (\text{II.48})$$

Nous considérons que la fonction de distribution des ions est une maxwellienne donc

$\int f_i d^3 v_i = n_i$. Alors :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{\Gamma_{ei} n_i}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\left(\frac{\vec{I}v_e^2 - \vec{v}_e \vec{v}_e}{v_e^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} \right] \quad (\text{II.49})$$

D'après la condition du quasi neutralité, nous écrivons : $Zn_i = n_e$ alors :

$$\frac{\Gamma_{ei} n_i}{2} = \frac{n_i}{8\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{Z_e Z_i e^2}{m_e} \right]^2 \ln\Lambda = \frac{n_i}{8\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{Ze^2}{m_e} \right]^2 \ln\Lambda = \frac{Zn_i}{8\pi\epsilon_0^2} \frac{Ze^4}{m_e^2} \ln\Lambda = \frac{Ze^4 n_e}{8\pi\epsilon_0^2 m_e^2} \ln\Lambda \quad (\text{II.50})$$

La forme approximative de l'opérateur de Landau pour la collision ($e-i$) est :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{Ze^4 n_e}{8\pi\epsilon_0^2 m_e^2} \ln\Lambda \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\left(\frac{\vec{I}v_e^2 - \vec{v}_e \vec{v}_e}{v_e^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} \right] = \frac{Ze^4 n_e}{8\pi\epsilon_0^2 m_e^2} \ln\Lambda \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\frac{1}{v_e} \left(\vec{I} - \frac{\vec{v}_e \vec{v}_e}{v_e^2} \right) \frac{\partial f_e(v_e)}{\partial \vec{v}_e} \right] \quad (\text{II.51})$$

On peut écrire cet opérateur sous forme [12] :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{v_{ei} v_e^3}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\left(\frac{\vec{I}v_e^2 - \vec{v}_e \vec{v}_e}{v_e^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} \right] = \frac{v_{the}^4}{2\lambda_{ei}} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_e} \left[\frac{1}{v_e} \left(\vec{I} - \frac{\vec{v}_e \vec{v}_e}{v_e^2} \right) \frac{\partial f_e(v_e)}{\partial \vec{v}_e} \right] =$$

$$\frac{v_{ei} v^3}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\left(\frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_j} \right] \quad (\text{II.52})$$

Avec :

$$\nu_{ei}(v_e) = \frac{Ze^4 n_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3} \ln\Lambda \quad \text{Est la fréquence de collision é-ion.}$$

$$v_{the} = \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2} \quad \text{Est la vitesse thermique des électrons.}$$

$$\lambda_{ei} = \frac{4\pi\epsilon_0^2 T_e^2}{Ze^4 n_e \ln\Lambda} \quad \text{Est le libre parcours moyen des électrons.}$$

Nous pouvons écrire le terme de collision comme :

$$C_{ei}(f_e) = \frac{\nu_{ei} v^3}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\left(\frac{\delta_{ij} v^2 - v_i v_j}{v^3} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_j} \right] \quad (\text{II.53})$$

II.11. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude détaillée sur la description cinétique du plasma et ainsi ses équations; commençant par l'équation de Liouville qui nous a aidé à l'étude du comportement dynamique d'un système de N particules en interaction, puis nous avons appliqué cette équation au plasma. Ensuite, nous avons décrit le comportement de ce système des particules chargées utilisant les équations de Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY). Les Approximations utilisées sur la hiérarchie « BBGKY » sont à l'origine des équations cinétiques qui sont : L'équation de Boltzmann, l'équation de Landau et l'équation de Fokker-Planck qui est la base de notre travail définie dans le chapitre suivant.

II.12 Références :

- [1] J. L. Delcroix et Abraham Bers, physique des plasmas, Tome 2, paris (1963).
- [2] R. L. Liboff, introduction to the theory of kinetic equations, Wiley, New York (1969).
- [3] T.M. Boyd et J.J. SANDERSON, The Physics of Plasmas, Cambridge University Press (2003).
- [4] L. Landou, E. Lifshitz, physique statistique, MIR, Moscou (1967).
- [5] Bogolyubov, N.N. (1962). Problems of a dynamical theory in statistical physics, in Studies in Statistical Mechanics, Vol.1, ed. J. deBoer and G.E. Uhlenbeck (North-Holland, Amsterdam).
- [6] N. G. Van Kampen and B.U. Felderhof, Theoretical Methods in Plasma Physics, Wiley.
- [7] M. Yezli, théories des ondelettes et les équations de Transport ; thèse de Magistère. U.A.B. Tlemcen (2009).
- [8] L. Boltzmann, leçons sur la théorie des gaz, Gauthier-Villars, paris (1902).
- [9] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, Phys. Rev. 94, 511 (1954).
- [10] A. Hochstim (Eds.) Kinetic Processes in Gases and Plasmas.
- [11] I. P. Shkarovsky and al., the particles Kinetics of Plasmas (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1966).

CHAPITRE III

ANISOTROPIE EN TEMPERATURE

DANS LES PLASMAS MAGNETISES

III. ANISOTROPIE EN TEMPERATURE DANS LES PLASMAS MAGNETISES

III.1	Introduction	77
III.2	L'équation de base	78
III.3	La fonction de distribution	79
III.4	Calcul de la fonction de distribution à haute fréquence	80
III.5	Calcul de la fonction de distribution statique	88
III.6	L'anisotropie en température	91
III.7	Conclusion	95
III.8	Références	95

III.1. Introduction :

Dans le niveau microscopique d'un plasma magnétisé, il y a des particules chargées d'espèces différents en mouvement thermique avec des vitesses différentes, chaque particule a un mouvement de gyration rapide autour du champ magnétique avec une vitesse perpendiculaire, v_{\perp} et une fréquence cyclotronique électronique ; $\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$ proportionnelle au champ magnétique B et un mouvement parallèle non affectée par le champ magnétique. La vitesse des électrons en fonction du temps peut s'écrire comme :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \exp(i\omega_{ce}t)$$

Il est judicieux de considérer deux échelles de temps : une échelle de temps rapide par rapport au mouvement cyclotron des électrons autour des lignes de champ magnétique, $\tau_{ce} = \frac{1}{\omega_{ce}}$ (Typiquement $\tau_{ce} \sim 10^{-11}$ s pour les expériences de la fusion thermonucléaire magnétique) et une échelle de temps lente hydrodynamique ($\tau_{hy} \gg \tau_{ce}$), ceci utilisé dans un plasma excité par une onde laser de haute fréquence dans le contexte de fusion laser [1,2].

Dans ce chapitre, nous cherchons à montrer analytiquement puis numériquement l'anisotropie en température des électrons pour un plasma magnétisé, dans le cadre de la théorie cinétique. L'équation de Fokker-Planck est l'équation appropriée pour décrire ce genre de plasma [3] décrite dans le premier paragraphe. Afin de calculer la fonction de distribution électronique dans le deuxième paragraphe, nous considérons que la théorie cinétique d'une particule avec 6D dans l'espace des phases: (\vec{r}, \vec{v}) . Ensuite, dans le quatrième et le cinquième paragraphe, nous calculons la fonction distribution à haute fréquence f^h et statique f^s respectivement. Ainsi que le sixième paragraphe est consacré au calcul de la température des électrons dans les directions parallèle et perpendiculaire du champ magnétique où nous allons montrer l'anisotropie en température théoriquement par des calculs analytiques puis

graphiquement par des calculs numériques. Enfin, et dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous allons donner une conclusion sur les résultats obtenus.

III.2. L'équation de base :

L'équation de base dans cette étude est celle de Fokker-Planck, en supposant que le plasma est homogène, en tenant compte du champ magnétique et des collisions électron-ion de Coulomb, et dans la présence de la force de Lorentz: $\vec{F}_L(t) = -e\vec{v}(t) \times \vec{B}$, suivant la notation de Braginskii [4,5] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{F}_L}{m_e} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C_{ei}(f) \quad (\text{III.1})$$

Où :

$f = f(\vec{v}, \vec{r}, t)$: Représente la fonction de distribution des électrons.

$C_{ei}(f^h)$: L'opérateur des collisions (é-i).

ω_{ce} : Est la fréquence cyclotronique électronique orientée par la direction du champ magnétique.

Nous supposons que le champ magnétique est orienté dans la direction x, $\vec{B} = B\hat{x}$, et les électrons oscillent dans le plan (y,z), où : $\vec{v}_\perp(t) = v_\perp(\hat{z} - i\hat{y}) \exp(i\omega_{ce}t)$. Dans cette géométrie, la force de Lorentz est représentée par :

$$\vec{F}_L = -m_e \omega_{ce} v_\perp (\hat{y} + i\hat{z}) \exp(i\omega_{ce}t) \quad (\text{III.2})$$

Ceci est équivalent à une force due à la présence d'une onde laser polarisée circulairement dans un plasma [1,2].

En tenant compte de l'équation (III.2), l'équation de Fokker-Planck (III.1) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega_{ce} v_{\perp} \left(\frac{\partial f}{\partial v_y} + i \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) \exp(i\omega_{ce} t) = C_{ei}(f) \quad (\text{III.3})$$

Cette équation est similaire à celle qui caractérise un plasma homogène en interaction avec une onde laser polarisée circulairement. Donc nous cherchons à une anisotropie en température due à la présence du champ magnétique.

III.3. La fonction de distribution :

Le mouvement d'une particule chargée dans un plasma dans la présence du champ magnétique statique peut être décomposé en mouvement de giration perpendiculaire rapide autour des lignes du champ magnétique et un mouvement parallèle le long des lignes du champ magnétique non affecté par la force de Lorentz, donc par le champ magnétique.

Par la séparation de ces deux échelles de temps dans l'équation de F-P (III.3). Nous supposons que la fonction de distribution est la somme de la fonction de distribution oscillatoire et celle quasi-statique, donc :

$$f = f(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) = f^s(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) + \text{Real}\{f^h(\vec{v}, t)\} \quad (\text{III.4})$$

$$f^h(\vec{v}, t) = f^h(v_{\parallel}, v_{\perp}) \exp(i\omega_{ce} t). \quad (\text{III.5})$$

Avec :

f^s : décrit les effets lentement variés dans le temps.

f^h : décrit les effets d'oscillation autour des lignes du champ magnétique.

La séparation de l'échelle du temps dans l'équation de Fokker-Planck (III.4), utilisant l'équation (III.5), nous donne un système de deux équations couplées suivant :

$$\frac{\partial f^h}{\partial t} - \omega_{ce} v_{\perp} \left(\frac{\partial f^s}{\partial v_y} + i \frac{\partial f^s}{\partial v_z} \right) \exp(i\omega_{ce} t) = C_{ei}(f^h), \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} - \omega_{ce} v_{\perp} \left\langle \frac{\text{Real}(\exp(i\omega_{ce} t)) \times \left(\frac{\partial f^h}{\partial v_y} + i \frac{\partial f^h}{\partial v_z} \right)}{\text{Real}(\exp(i\omega_{ce} t))} \right\rangle_{\tau_{ce}} = C_{ei}(f^s). \quad (\text{III.7})$$

La première est l'équation variée d'un temps rapide qui regroupe les termes haute fréquence pour B=1Tesla utilisé dans le TOKAMAK, et qui représente aussi l'évolution spatio-temporelle.

La seconde est obtenue en moyennant l'équation (III.3) sur le temps t, elle variée d'un temps lent et représente l'évolution spatio-temporelle.

Ici le symbole $\langle X \rangle_{\tau_{ce}} = \frac{1}{\tau_{ce}} \int_0^{\tau_{ce}} X dt$ signifie la valeur moyenne sur la période du cyclotron.

III.4. Calcul de la fonction de distribution à haute fréquence :

En utilisant l'équation (III.6), et on pose : l'équation f^h peut calculer par l'équation (III.8) en fonction de f^s , comme :

$$i\omega_{ce} f^h - C_{ei}(f^h) = \omega_{ce} v_{\perp} \left(\frac{\partial f^s}{\partial v_y} + i \frac{\partial f^s}{\partial v_z} \right) \exp(i\omega_{ce} t). \quad (\text{III.8})$$

L'opérateur de collision, $C_{ei}(f)$ est exprimé par Landau en [6,7,8] comme :

$$C_{ei}(f) = \frac{A}{v^3} \frac{\partial}{\partial v_j} (v_j v_k - v^2 \delta_{jk}) \frac{\partial f}{\partial v_k} \quad (\text{III.9})$$

Où :

$A = \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}}$, $\lambda_{ei} = \frac{4\pi\epsilon_0 T_e^2}{n_e e^4 Z \ln \Lambda}$, est le parcours libre moyen, $v_{ei} = \frac{1}{2} \frac{v_t}{\lambda_{ei}}$ et $v_t = \sqrt{T_e/m_e}$ est la vitesse thermique.

L'opérateur des collisions (é-i) dans la relation (III.9) a des harmoniques sphériques comme des fonctions propres [9-11], donc il est judicieux d'utiliser les coordonnées sphériques, $(v, \mu = \frac{v_x}{v}, \varphi = \arctg \frac{v_y}{v_z})$, donc le côté droit de l'équation (III.8) se présente comme suit:

$$\omega_{ce} \left((1 - \mu^2)^{3/2} \left(v \frac{\partial f^s}{\partial v} + \mu \frac{\partial f^s}{\partial \mu} \right) \right) \times \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi) \quad (\text{III.10})$$

Cette relation montre que f^h est proportionnelle à $\exp(i\varphi)$ et f^s est indépendante de φ , donc il est judicieux de développer $f^s(\vec{v}) = f^s(\mu, v)$ sur les polynômes de Legendre $P_l(\mu)$:

$f^s = \sum P_l(\mu) f_l^s(v)$ et de développer $f^h = f^h(\mu, v) \exp(i\omega_{ce}t + \varphi)$ sur la base des harmoniques sphériques $Y_l^1(\mu, \varphi)$ d'ordre $(l, m = 1)$:

$$f^h = \sum_{l=0}^{l=\infty} Y_l^1(\mu, \varphi) f_l^h(v) \exp(i\varphi) \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1(\mu) f_l^h(v),$$

Où : $P_l^1(\mu)$ (le polynôme de Legendre associé d'ordre $(l, m=1)$). On tient compte de ces développements, l'équation des hautes fréquences (III.7) peut s'écrire comme suit :

$$\left(i\omega_{ce} + l(l+1) \frac{A}{v^3} \right) \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 f_l^h(v) = -\omega_{ce} \left\{ (1 - \mu^2)^{3/2} \left(v \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l \frac{\partial f_l^s}{\partial v} + \mu \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{\partial P_l}{\partial \mu} f_l^s \right) \right\}. \quad (\text{III.11})$$

En utilisant les relations de récurrences entre les polynômes de Legendre et les polynômes de Legendre associés [9], nous démontrons que pour : $l \geq 0$ et $0 \leq m \leq l$:

$$\mu P_l^m = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}^m + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}^m. \quad (\text{A1})$$

Pour $m = 0$. L'équation (A1) est écrite comme :

$$\mu P_l^0 = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}^0 + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}^0. \quad (\text{A2})$$

Multiplions l'équation (A2) par μ , nous obtenons:

$$\mu^2 P_l^0 = \frac{l+1}{2l+1} \mu P_{l+1}^0 + \frac{l}{2l+1} \mu P_{l-1}^0, \quad (\text{A3})$$

Où : μP_{l+1}^0 et μP_{l-1}^0 sont donnés par L'équation (A2) pour $l \mapsto l + 1$ et $l \mapsto l - 1$ respectivement.

Nous substituons l'équation (A2) dans l'équation (A3), nous trouvons :

$$\mu^2 P_l^0 = \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} P_{l+2}^0 + \left(\frac{(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} + \frac{l^2}{(2l+1)(2l-1)} \right) P_l^0 + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)} P_{l-2}^0 \quad (\text{A4})$$

Et ainsi :

$$(1 - \mu^2) P_l^0 = -\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} P_{l+2}^0 + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} P_l^0 - \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)} P_{l-2}^0. \quad (\text{A5})$$

Multiplions cette équation par $\sqrt{1 - \mu^2}$, nous obtenons :

$$(1 - \mu^2)^{3/2} P_l^0 = -\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l+2}^0 + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_l^0 - \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l-2}^0. \quad (\text{A6})$$

Pour toute let m :

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l^m = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^{m+1} - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^{m+1} \quad (\text{A7})$$

Cette équation peut s'écrire pour : $(l + 2, m = 0)$, $(l, m = 0)$ et $(l - 2, m = 0)$ comme :

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_{l+2}^0 = \frac{1}{2l+5} P_{l+1}^1 - \frac{1}{2l+5} P_{l+3}^1. \quad (A8)$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l^0 = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^1 - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^1, \quad (A9)$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_{l-2}^0 = \frac{1}{2l-3} P_{l-3}^1 - \frac{1}{2l-3} P_{l-1}^1. \quad (A10)$$

Par la substitution de ces équations. (A8), (A9) et (A10) dans (A6), nous trouvons :

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l^0 = & - \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} P_{l-3}^1 + \left(\frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} + \right. \\ & \left. \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} \right) P_{l-1}^1 - \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l+1}^1 + \\ & \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1. \end{aligned} \quad (A11)$$

Multipliant cette équation par f_l^s et sommant sur l , on trouve:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l^0 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = & - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} P_{l-3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} + \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} \right) P_{l-1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} - \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l+1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} + \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} \end{aligned} \quad (A12)$$

Il est pratique de déplacer la somme dans le côté droit de cette équation comme suit :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} P_{l-3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+3)(l+2)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)} P_l^1 v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v}, \quad (A13)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} \right) P_{l-1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l+1)(2l+3)(2l+5) - (l+2)^2(2l+1) - (l+1)^2(2l+5)}{(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} + \frac{(l+1)l}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \right) P_l^1 v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v}, \quad (\text{A14})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l+1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l(l+1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(2l-3)(2l-1)(2l+1) - l^2(2l-3) - (l-1)^2(2l+1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)} \right) P_l^1 v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v}, \quad (\text{A15})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l-2)(l-1)}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)} P_l^1 v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v}. \quad (\text{A16})$$

Ces équations (A13)-(A16) sont justifiées par le fait que les f_l^s sont nuls pour $l < 0$.

Par substitution des équations (A13) - (A16) dans l'équation (A12), nous avons bien trouvé l'équation (A17) :

$$\sum_{l=0}^{\infty} v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^1 (G_1(l) v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v} + G_2(l) v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v} + G_3(l) v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v} +$$

$$G_4(l) v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v}), \quad (\text{A17})$$

Où:

$$G_1(l) = \frac{(l-2)(l-1)}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)},$$

$$G_2(l) = - \left(\frac{l(l+1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} \frac{(2l-3)(2l-1)(2l+1) - l^2(2l-3) - (l-1)^2(2l+1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)} \right)$$

$$G_3(l) = + \frac{(l+1)l}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \text{ et}$$

$$G_4(l) = - \frac{(l+3)(l+2)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)}.$$

Par la suite pour établir l'équation (III.11), nous utilisons les relations de récurrence entre les polynômes de Legendre associés, illustrées dans [9] pour tous les ordres $l \geq 0$ et $0 \leq m \leq l$,

ainsi :

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_l^m}{d\mu} = \frac{(l+1)(l+m)}{2l+1} P_{l-1}^m - \frac{l(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m, \quad (B1)$$

$$\mu P_l^m = \frac{l+m}{2l+1} P_{l+1}^m - \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l-1}^m, \quad (B2)$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l^m = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^{m+1} - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^{m+1}. \quad (B3)$$

Pour $m=0$, ces équations sont écrites comme :

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l(l+1)}{2l+1} P_{l-1} - \frac{l(l+1)}{2l+1} P_{l+1}, \quad (B4)$$

$$\mu P_l = \frac{l+1}{2l+1} P_{l-1} + \frac{l}{2l+1} P_{l+1}, \quad (B5)$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^1 - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^1. \quad (B6)$$

Multiplions l'équation (B4) par μ , nous obtenons :

$$(1 - \mu^2) \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l(l+1)}{2l+1} \mu P_{l-1} - \frac{l(l+1)}{2l+1} \mu P_{l+1}. \quad (B7)$$

Substitutions l'équation (B5) dans le côté droit de l'équation (B7) pour $l \rightarrow l-1$ et $l \rightarrow l+1$, on obtient alors :

$$(1 - \mu^2) \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l^2(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} P_{l-2} + \frac{l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} P_l - \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} P_{l+2}. \quad (B8)$$

Multiplions l'équation (B8) par $\sqrt{1 - \mu^2}$, nous obtenons :

$$(1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l^2(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l-2} + \frac{l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_l - \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l+2}. \quad (B9)$$

Utilisons l'équation (B6) dans la partie droite de l'équation (B9) pour $l \rightarrow l-2$, l et $l \rightarrow l-1$, on obtient l'équation suivante :

$$(1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l^2(l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)} P_{l-3}^1 + \left(\frac{(2l-3)l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{l^2(l+1)(2l+1)(2l+3)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l-1}^1 - \left(\frac{(2l+5)l(l+1)[(l-1)(2l+3) + (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} + \frac{l(l+1)^2(2l-1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} \right) P_{l+1}^1 + \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 \quad (B10)$$

Multiplions cette équation (B10) par f_l^S et en prenant la somme sur toute l , on obtient :

$$\sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{dP_l}{d\mu} f_l^S = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{l^2(l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)} P_{l-3}^1 f_l^S + \left(\frac{(2l-3)l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{l^2(l+1)(2l+1)(2l+3)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l-1}^1 f_l^S - \left(\frac{(2l+5)l(l+1)[(l-1)(2l+3) + (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} + \frac{l(l+1)^2(2l-1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} \right) P_{l+1}^1 f_l^S + \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 f_l^S \right] \quad (B11)$$

Il est pratique de déplacer la somme dans le côté droit de cette équation comme suit :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^2(l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)} P_{l-3}^1 f_l^S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+3)^2(l+4)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)} P_l^1 f_{l+3}^S, \quad (B12)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l-3)l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{l^2(l+1)(2l+1)(2l+3)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right] P_{l-1}^1 f_l^S = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l-1)(l+1)(l+2)[l(2l+5) - (l+3)(2l+1)]}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} - \frac{(l+1)^2(l+2)(2l+3)(2l+5)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} \right] P_l^1 f_{l+1}^S, \quad (B13)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l+5)l(l+1)[(l-1)(2l+3)+(l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} + \frac{l(l+1)^2(2l-1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} \right] P_{l+1}^1 f_l^S =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l+3)(l-1)l[(l-2)(2l+1)+(l+1)(2l-3)]}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)} + \frac{(l-1)l^2(2l-3)(2l-1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)} \right] P_l^1 f_{l-1}^S, \quad (\text{B14})$$

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 f_l^S = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(l-3)(l-2)^2}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)} P_l^1 f_{l-3}^S. \quad (\text{B15})$$

Substituons les équations. (B12)-(B15) dans l'équation (B11), nous obtenons :

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} (1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} \mu \frac{\partial P_l}{\partial \mu} f_l^S = \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 (G_5(l) f_{l-3}^S + G_6(l) f_{l-1}^S + G_7(l) f_{l+1}^S + G_8(l) f_{l+3}^S), \quad (\text{III.12})$$

Où :

$$G_5(l) = \frac{(l-3)(l-2)^2}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)}, \quad G_6(l) = -\frac{(2l+3)(l-1)l[(l-2)(2l+1)+(l+1)(2l-3)]+(l-1)l^2(2l-3)(2l-1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)},$$

$$G_7(l) = \frac{(2l-1)(l+1)(l+2)[l(2l+5)-(l+3)(2l+1)]-(l+1)^2(l+2)(2l+3)(2l+5)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} \text{ et}$$

$$G_8(l) = \frac{(l+3)^2(l+4)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}.$$

Utilisons les équations (A17) et (III.12), l'équation (III.11) est écrite comme :

$$\sum_{l=0}^{\infty} (i\omega_{ce} + \frac{A}{v^3} l(l+1)) P_l^1 f_l^h = -\omega_{ce} \exp(i\omega_{ce} t + i\varphi) \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 [G_1(l) v \frac{\partial f_{l-3}^S}{\partial v} +$$

$$G_2(l) v \frac{\partial f_{l-1}^S}{\partial v} + G_3(l) v \frac{\partial f_{l+1}^S}{\partial v} + G_4(l) v \frac{\partial f_{l+3}^S}{\partial v} + G_5(l) f_{l-3}^S + G_6(l) f_{l-1}^S + G_7(l) f_{l+1}^S + G_8(l) f_{l+3}^S]. \quad (\text{III.13})$$

La projection de cette équation sur le polynôme de Legendre associé, $P_l^1(\mu)$, permet de

calculer f_l^h comme fonction de $f_{l-3}^S, f_{l-1}^S, f_l^S, f_{l+1}^S$ et f_{l+3}^S , d'où:

$$f_l^h = [G_1(l)v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v} + G_2(l)v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v} + G_3(l)v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v} + G_4(l)v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v} + G_5(l)f_{l-3}^s + G_6(l)f_{l-1}^s + G_7(l)f_{l+1}^s + G_8(l)f_{l+3}^s] i \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi), \quad (\text{III.14})$$

Notez que dans cette équation, l'approximation de plasma fortement magnétisée ($\omega_{ce} \gg \nu_{ei}$) est utilisée. Les trois premières composantes de f^h sont données par :

$$f_1^h = \left[-\frac{4}{5}v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} + \frac{8}{35}v \frac{\partial f_2^s}{\partial v} - \frac{4}{105}v \frac{\partial f_4^s}{\partial v} - \frac{6}{7}f_2^s + \frac{4}{21}f_4^s \right] i \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi) \quad (\text{III.15})$$

$$f_2^h = \left[-\frac{4}{21}v \frac{\partial f_1^s}{\partial v} + \frac{8}{63}v \frac{\partial f_3^s}{\partial v} + \frac{20}{693}v \frac{\partial f_5^s}{\partial v} - \frac{6}{35}f_1^s - \frac{8}{21}f_3^s + \frac{50}{231}f_5^s \right] i \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi) \quad (\text{III.16})$$

$$f_3^h = \left[\frac{2}{15}v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} - \frac{2}{15}v \frac{\partial f_2^s}{\partial v} + \frac{46}{495}v \frac{\partial f_4^s}{\partial v} + \frac{10}{429}v \frac{\partial f_6^s}{\partial v} - \frac{48}{175}f_2^s - \frac{28}{99}f_4^s + \frac{28}{143}f_6^s \right] i \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi) \quad (\text{III.17})$$

III.5. Calcul de la fonction de distribution statique :

Le deuxième terme à gauche de l'équation de la fonction de distribution statique, l'équation (III.7), peut être écrite en utilisant des coordonnées sphériques telles que :

$$\omega_{ce} \langle \text{Real}(v_{v_\perp} \exp(i\omega_{ce}t) \times \text{Real}(\frac{\partial f^h(v,\mu,\varphi,t)}{\partial v_y} + \frac{\partial f^h(v,\mu,\varphi,t)}{\partial v_z})) \rangle_{\tau_{ce}} = \frac{\omega_{ce}}{2} (1 - \mu^2)^{3/2} \times \left(v \frac{\partial f^h(v,\mu)}{\partial v} - \mu \frac{\partial f^h(v,\mu)}{\partial \mu} + \frac{f^h(v,\mu)}{(1-\mu^2)} \right) \quad (\text{III.18})$$

L'équation de la fonction de distribution statique est alors donnée dans les coordonnées sphériques par :

$$\frac{\omega_{ce}}{2} (1 - \mu^2)^{3/2} = \frac{A}{v^3} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f^s(v,\mu)}{\partial \mu} \right). \quad (\text{III.19})$$

Nous développons, comme dans le paragraphe 4, le $f^s(v, \mu)$ par $P_l(\mu)$ et le $f^h(v, \mu)$ par $P_l^1(\mu)$, où:

$$\frac{\omega_{ce}}{2} \sum_{l=0}^{l=\infty} \left\{ v \frac{\partial f_l^h}{\partial v} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l^1 - (1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{\partial P_l^1}{\partial \mu} f_l^h + (1 - \mu^2)^{1/2} P_l^1 f_l^h \right\} = \frac{A}{v^3}$$

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} l(l+1) P_l f_l^s. \quad (\text{III.20})$$

En utilisant les relations de récurrence entre les polynômes de Legendre, $P_l(\mu)$, et les polynômes de Legendre associés, $P_l^1(\mu)$, l'équation (III.20) s'écrit comme suit:

$$\frac{\omega_{ce}}{2} \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l \left[G_9(l) v \frac{\partial f_{l-3}^h}{\partial v} + G_{10}(l) v \frac{\partial f_{l-1}^h}{\partial v} + G_{11}(l) v \frac{\partial f_{l+1}^h}{\partial v} + G_{12}(l) v \frac{\partial f_{l+3}^h}{\partial v} + G_{13}(l) f_{l-3}^h + G_{14}(l) f_{l-1}^h + G_{15}(l) f_{l+1}^h + G_{16}(l) f_{l+3}^h \right] = \frac{A}{v^3} \sum_{l=0}^{l=\infty} l(l+1) P_l f_l^s(v), \quad (\text{III.21})$$

Où :

$$G_9(l) = -\frac{(l-3)(l-2)(l-1)l}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)},$$

$$G_{10}(l) = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(l-1)l[(l-1)(l+1)(2l-3)+l(l-2)(2l+1)+(2l+1)(2l-1)(2l-3)]}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)}$$

$$G_{11}(l) = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} - \frac{(l+1)(l+2)[(l+1)(l+3)(2l+1)+(l+2)l(2l+5)+(2l+5)(2l+3)(2l+1)]}{(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)}$$

$$G_{12}(l) = \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)}, \quad G_{13}(l) = \frac{(l-3)^2(l-2)(l-1)^2 l}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)},$$

$$G_{14}(l) = -\frac{l^3(l-1)^2(l-2)}{(2l-3)(2l-1)^2} - \frac{(l+1)l^2(l-1)^3}{(2l+1)(2l-1)^2} - \frac{(l-1)^2 l(l+1)^2(l+2)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(l-1)l}{(2l-1)},$$

$$G_{15}(l) = \frac{(l+2)^3(l+1)^2 l}{(2l+1)(2l+3)^2} + \frac{(l+3)(l+2)^2(l+1)^3}{(2l+5)(2l+3)^2} + \frac{(l+2)^2(l+1)l^2(l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} - \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3}$$

$$\text{Et } G_{16}(l) = -\frac{(l+4)^2(l+3)(l+2)^2(l+1)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}.$$

Cette équation, associée à la formule f_l^h , (équations (III.14 à 17)), permet de déterminer les différentes composantes, $f_l^s(v)$, de la fonction de distribution statique. Ainsi :

Pour l'ordre zéro ($l = 0$) :

$$\frac{\omega_{ce}}{2} \left(\frac{4}{5} v \frac{\partial f_1^h}{\partial v} - \frac{8}{35} v \frac{\partial f_3^h}{\partial v} - \frac{32}{35} f_3^h + \frac{4}{5} f_1^h \right) = 0 \quad (\text{III.22})$$

Pour le premier ordre ($l = 1$):

$$f_1^s = \frac{1}{4} \frac{\omega_{ce}}{\vartheta_{ei}(v)} \left[\frac{216}{175} v \frac{\partial f_2^h}{\partial v} - \frac{8}{21} v \frac{\partial f_4^h}{\partial v} - \frac{40}{21} f_4^h + \frac{12}{175} f_2^h \right] \quad (\text{III.23})$$

Où $\vartheta_{ei}(v)$ est la fréquence dépendante de la vitesse par rapport aux électrons ayant une vitesse v . Pour le second ordre ($l=2$) :

$$f_2^s = \frac{1}{12} \frac{\omega_{ce}}{\vartheta_{ei}(v)} \left(\frac{36}{35} v \frac{\partial f_1^h}{\partial v} - \frac{96}{35} v \frac{\partial f_3^h}{\partial v} - \frac{40}{77} v \frac{\partial f_5^h}{\partial v} - \frac{960}{77} f_5^h - \frac{2}{7} f_1^h + \frac{68}{7} f_3^h \right) \quad (\text{III.24})$$

En négligeant les composants d'ordre supérieur derrière le composant f_0^s , en considérant que $f_{l+2}^s \ll f_l^s$, cette dernière équation peut être écrite ainsi :

$$f_2^s = \frac{\omega_{ce}}{12\vartheta_{ei}(v)} \times \left(-0.06857 v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} + 0.01904 v \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} \right) \right) \quad (\text{III.25})$$

Notez que l'équation (III.25) représente une relation de récurrence entre différentes composantes de f^s . Cela nous permet de déterminer la fonction de distribution en sachant que f_0^s est une condition aux limites. La fonction de distribution statique d'ordre zéro correspond à la fonction de distribution non perturbée (par le champ magnétique) des électrons. Cette fonction de distribution peut ensuite être estimée en considérant l'équilibre thermodynamique comme une fonction de Maxwell. À cet ordre (zéro), la fonction haute fréquence disparaît.

III.6. L'anisotropie en température :

En limitant l'extension au second ordre de la fonction de distribution dans les polynômes de Legendre, la température parallèle $T_{\parallel} = \overline{m_e v_{\parallel}^2}$, où le symbole $\overline{\quad}$ représente la valeur moyenne, est donnée par :

$$\begin{aligned} n_e T_{\parallel} &= m_e \int v_{\parallel}^2 f d^3 \vec{v} = \pi m_e \int \mu^2 v^4 \left\{ \begin{array}{l} f_0(v) + P_1(\mu) f_1(v) + \\ P_2(\mu) f_2(v) \end{array} \right\} dv d\mu \\ &= \frac{4}{3} \pi m_e \int v^4 \{f_0(v)\} dv - \frac{8}{15} \pi m_e \int v^4 \{f_2(v)\} dv \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Il est important de noter que la fonction de distribution haute fréquence ne contribue pas à la température car sa moyenne sur la période du cyclotron est nulle [$f^h \sim \exp(i\omega_{ce} t)$]. La fonction de distribution d'ordre zéro correspondant au plasma non affecté par le champ magnétique est considérée comme une maxwellienne :

$f_0(v) = \frac{n_e}{v_i^3 (2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_i^2}\right)$. Par conséquent, la deuxième fonction de distribution anisotrope (III.26) peut être écrite comme suit :

$$f_2^S = -\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \frac{n_e}{v_i^3 (2\pi)^{3/2}} \times \left(0.011809 \frac{v^5}{v_i^5} - 0.0057 \frac{v^7}{v_i^7}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{2v_i^2}\right) \quad (\text{III.27})$$

Calculer l'intégrale dans l'équation (III.27), l'expression explicite de T_{\parallel} est :

$$T_{\parallel} = T \left(1 + a \frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}\right), \quad (\text{III.28})$$

Où: ν_{ei} est la fréquence de collision (e-i), et $a \approx 1.93$.

La température perpendiculaire, $T_{\perp} = \frac{1}{2} \overline{m_e v_{\perp}^2}$, est donnée par:

$$n_e T_{\perp} = \frac{1}{2} m_e \int v_{\perp}^2 f d^3 \vec{v} = m_e \int (1 - \mu^2) v^4 (f_0 + \mu f_1 + \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) f_2) dv d\mu =$$

$$\frac{4}{3} \pi m_e \int v^4 f_0 dv - \frac{4}{15} \pi m_e \int v^4 f_2 dv. \quad (\text{III.29})$$

Dans le cas de la fonction de distribution isotrope maxwellienne, le T_{\perp} est calculé explicitement à partir de l'équation ci-dessus comme étant :

$$T_{\perp} = T \left(1 + \frac{a \omega_{ce}}{2 \nu_{ei}} \right) \quad (\text{III.30})$$

L'anisotropie de la température est alors donnée par :

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} = \frac{1 + a \frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}}{1 + \frac{a \omega_{ce}}{2 \nu_{ei}}} \quad (\text{III.31})$$

Il est très clair que cette anisotropie dépend du rapport entre la fréquence du cyclotron et la fréquence de collision. Cette équation montre que l'anisotropie tend vers 1 pour une fréquence de collision élevée ($\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \ll 1$) ce qui est en accord avec la simulation numérique 1D réalisée par Takizuka et al. [12], malgré que l'équation (III.31) est limitée au plasma fortement magnétisé ($\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \gg 1$). Nous avons présenté, sur la figure ci-dessous (III.1), l'anisotropie de la fonction de distribution.

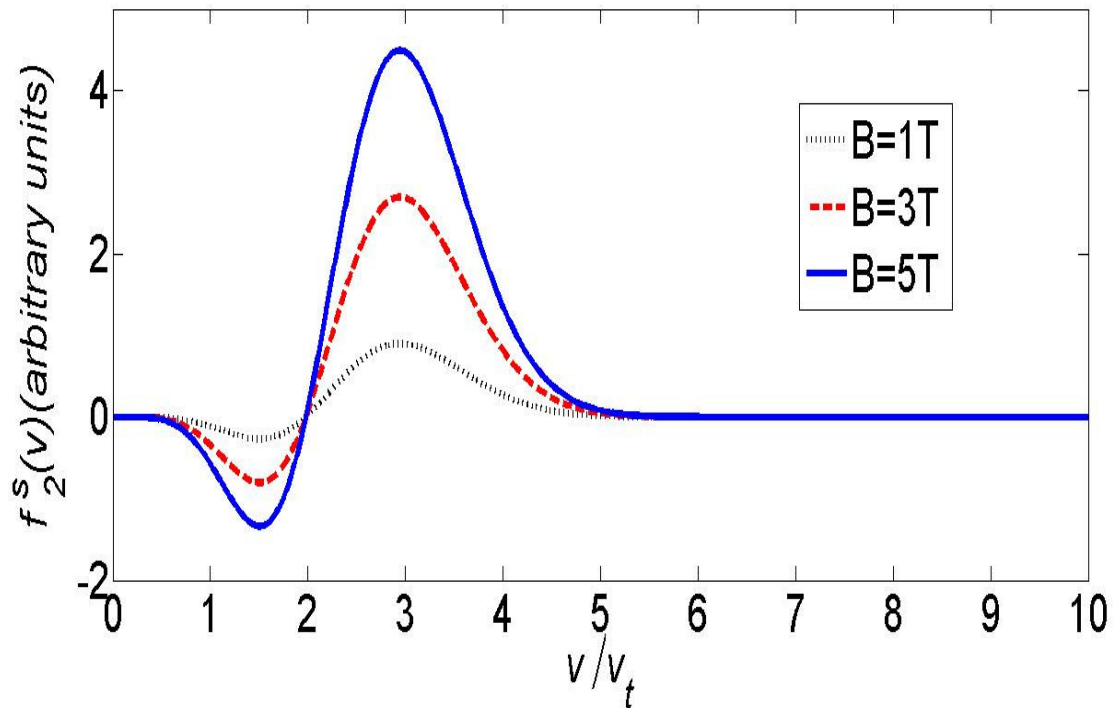


Figure III.1. L'anisotropie de la fonction de distribution pour différentes valeurs du champ magnétique

Cette figure montre que l'anisotropie est négative pour les faibles vitesses ($v \lesssim 2v_t$), ce qui correspond à un plasma plus chaud dans la direction parallèle. Cependant, dans la région à grande vitesse ($v \gtrsim 2v_t$), la composante anisotrope de f est positive et plus importante. Cela montre que les électrons rapides sont en fait responsables de l'anisotropie.

Nous présentons sur la figure ci-dessous (III.2) l'anisotropie de la température en fonction du paramètre $\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}$.

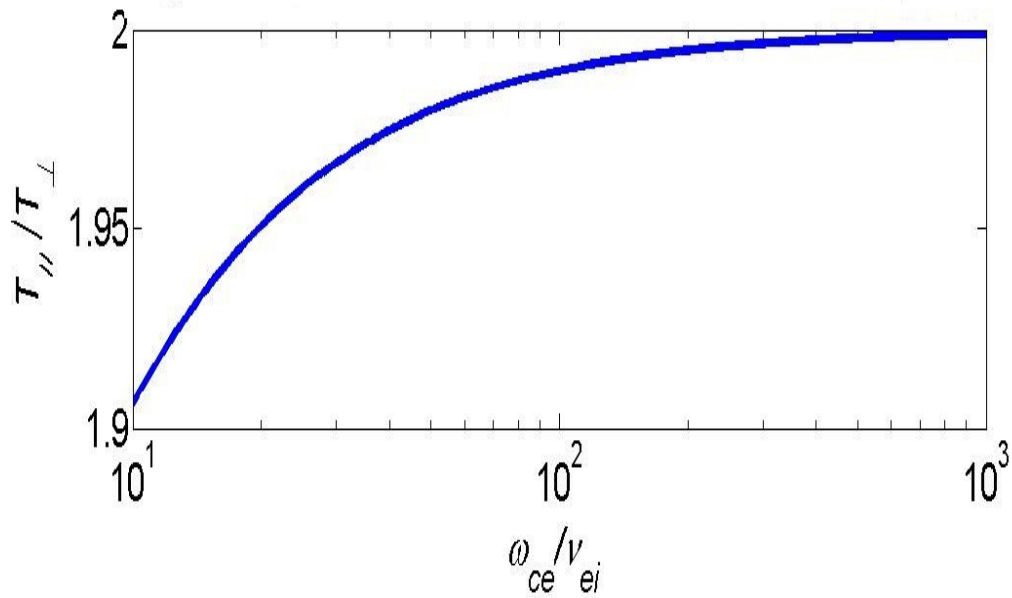


Figure III.2. L'anisotropie de la température en fonction du paramètre $\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}$.

Cela montre que l'anisotropie devient importante comme le champ magnétique appliqué devient intense et cette anisotropie subit une saturation au voisinage de la valeur 2.

III.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons calculé analytiquement la fonction de distribution pour le plasma fortement magnétisé. En utilisant cette fonction de distribution pour calculer la température dans les directions parallèle et perpendiculaire. Il a été montré que la température est anisotrope et elle dépend du champ magnétique et de la fréquence des collisions.

Nous avons fait aussi un calcul ou bien une simulation numérique pour démontrer cette anisotropie en température. Pour cela, nous avons présenté, sur la figure (III.1) l'anisotropie de la fonction de distribution.

Ce résultat analytique et numérique peut présenter et montrer des nombreuses applications pour une variété de phénomènes dans les plasmas magnétisés tels que : le transport, l'onde d'Alfvén et l'instabilité.

III.8 Références:

- [1] Bendib A, Bendib K and Sid A, Phys. Rev. E, 55, 7522 (1997).
- [2] Sid A, Phys of Plasmas, 10, 214 (2003)
- [3] Peeters Arthur G and Strintzi Dafni, Ann. Phys, 17, No. 2 - 3, 142- 157 (2008).
- [4] S. I. Braginskii, in Reviews of plasma Physics (M. A. Leontovich, Consultants Bureau, vol. 1, NewYork (1965).
- [5] Shkarofsky I P, Johnston T W and Bachynski M P, The particle Kinetics of Plasmas (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1966).
- [6] Chandrasekhar S, Rev. Modern Phys.15, 1 (1943); Astrophys. J. 97, 255 (1943).
- [7] Rosenbluth M N, MacDonald W and Judd D. Phys. Rev. 107, 1 (1957).
- [8] Spitzer L, Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, New York, USA, 1962) Chap 5.

[9] Abramowitz M and Stegun I. Handbook of Mathematical Functions, (Dover, New York, USA, 1970).

[10] Chang Y B, Li D. Phys. Rev. 53, 3999 (1996).

[11] Baumjohann W and Treumann R A. Basic Space Plasma Physics. (Imperial College Press, London, 1997).

[12] Takizuka Tet *al.*, J. Nucl. Mater. 128-9, 104 (1984).

CHAPITRE IV

APPLICATION SUR LA DISPERSION DES ONDES D'ALFVEN

IV. APPLICATION SUR LA DISPERSION DES ONDES D'ALFVEN

IV.1	Introduction	99
IV.2	Détermination de la relation de dispersion	99
IV.2.1	La limite cinétique de KAWs	102
i.	Propagation parallèle	103
ii.	Cas isotrope	104
IV.2.2	La limite d'inertie de KAWs	104
IV.3	Application des résultats	105
IV.3.1	Détermination de l'onde d'Alfvén inertielle modifiée dans les modes longitudinaux	105
IV.3.2	Détermination de la vitesse du groupe	109
IV.4	Conclusion	109
IV.5	Références	110

IV.1. Introduction :

Ce chapitre concerne une application sur la dispersion des ondes d'Alfvén. Précisément, nous voulons appliquer nos résultats obtenus dans les références [12,13] sur ceux obtenus par **M. F. Bashir et al.**, présentés dans la référence [1] de ce chapitre..

Dans ce travail, le système linéaire de Vlasov-Maxwell est utilisé, un tenseur diélectrique généralisé est dérivé pour un plasma d'électrons – ions, bi-maxwellien, non relativiste et magnétisé. Supposant que les ondes sont de faible fréquence dans un plasma de faible bêta, une nouvelle relation de dispersion décrivant la propagation oblique des modes d'Alfvén a été déterminé en incorporant les anisotropies de température des électrons et des ions à la fois et leurs effets de rayon de Larmor fini. De la relation de dispersion résultante pour les ondes d'Alfvén cinétiques (KAWS), les expressions analytiques sont déterminées pour les régimes cinétiques et inertielles respectivement $\left(v_{t//i} \ll \frac{\omega}{k_{//}} \ll v_{t//e} \text{ et } \frac{m_e}{m_i} \ll \beta \ll 1\right)$ et $\left(\frac{\omega}{k_{//}} \gg v_{t//e,i} \text{ et } \beta \ll \frac{m_e}{m_i}\right)$.

Dans les deux cas, les modes d'Alfvén sont modifiés en raison de l'effet acoustique résultant de l'anisotropie en température, ce qui peut augmenter ou diminuer la vitesse d'Alfvén en fonction de la force et des anisotropies.

Un certain nombre de cas spéciaux sont également récupérés dans des conditions appropriées.

IV.2. Détermination de la relation de dispersion :

La distribution bi-maxwellienne non-relativiste du moment est donnée par :

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m T_{//}}} \exp \left[-\frac{p_{\perp}^2}{2m T_{\perp}} - \frac{p_{//}^2}{2m T_{//}} \right] \quad (\text{IV.1})$$

Utilisant le système de Vlasov-Maxwell linéarisé et en supposant que le vecteur d'onde k se situe dans le plan x - z , la relation de dispersion a été dérivée pour les ondes

électromagnétiques dans un plasma bi-maxwellien, non relativiste et magnétisé qui peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{zx} + n_{\parallel}n_{\perp} \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - n^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xx} + n_{\parallel}n_{\perp} & -\epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - n_{\perp}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Où :

$\vec{\epsilon}$ Représente le tenseur de permittivité diélectrique

$n_{\parallel} = \frac{ck_{\parallel}}{\omega}$, $n_{\perp} = \frac{ck_{\perp}}{\omega}$ et $n = \frac{ck}{\omega}$ sont les indices de réfraction parallèle, perpendiculaire et total respectivement.

Dans le cas isotrope, le tenseur de permittivité diélectrique $\vec{\epsilon}$ est le même que celui indiqué dans la référence [2].

Dans la basse fréquence où la longueur d'onde est longue et parallèle dans un plasma à faible bêta, les composantes non-diagonales du tenseur deviennent négligeables et donc la relation de dispersion pour les KAWs peut être écrite comme :

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - n_{\parallel}^2 & n_{\parallel}n_{\perp} \\ n_{\parallel}n_{\perp} & \epsilon_{zz} - n_{\perp}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Dans les limites indiquées ci-dessus, le mode magnétosonique et les KAWs sont découplés et le vecteur électrique E et le vecteur d'ondes k se trouvent dans le même plan pour les KAWs comme l'ont noté plusieurs auteurs [3,4] à [6]. En outre, l'argument de la fonction de dispersion plasmatique est supérieur à un, c'est-à-dire $\frac{\omega - n\Omega_{\alpha}}{k_{\parallel}v_{t\alpha}} \gg 1$ (pour $n \neq 0$),

afin que nous puissions utiliser l'expansion asymptotique de la fonction de dispersion

plasmatique [7] pour $\xi_{n\alpha} \gg 1$, c'est à dire : $Z(\xi_{n\alpha}) \approx \frac{1}{\xi_{n\alpha}} - \frac{1}{2\xi_{n\alpha}^3}$.

Les expressions des ϵ_{xx} et ϵ_{zz} sont données par :

$$\epsilon_{xx} = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \left(\frac{1 - \Gamma_0(\lambda_i)}{\lambda_i} \right) - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \chi_1 \quad (\text{IV.4})$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{\Gamma_0(\lambda_e)}{2k_{\parallel}^2 \lambda_{De}^2} Z'(\xi_{0e}) - \frac{\Gamma_0(\lambda_i)}{2k_{\parallel}^2 \lambda_{Di}^2} Z'(\xi_{0e}) + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \chi_2 \quad (\text{IV.5})$$

Ici, la longueur de Debye au carré pour les électrons et les ions est : $\lambda_{De,i}^2 = \frac{v_{Te,i}^2}{2\omega_{pe,i}^2}$, aussi

l'expansion asymptotique de la fonction de dispersion du plasma : $Z(\xi_{n\alpha}) \approx \frac{1}{\xi_{n\alpha}} - \frac{1}{2\xi_{n\alpha}^3}$ et la

fonction de Bessel modifiée est : $2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\lambda_{\alpha}) = 1 - \Gamma_0(\lambda_{\alpha})$.

Dans le plasma à faible bêta, c'est-à-dire pour $\beta \left(= \frac{4\pi n_0 T_{e\parallel}}{B_0^2} = \frac{c_s^2}{v_A^2} \right) \ll 1$, Lysak et Lotko [8]

ont résolu le problème de la relation de dispersion isotrope pour l'onde d'Alfvén cinétique en supposant que la réponse des ions est principalement perpendiculaire au champ magnétique ambiant, alors que celle des électrons est principalement parallèle.

Dans ces calculs, ils ont pris en compte la contribution des deux espèces dans la direction perpendiculaire et parallèle au champ magnétique ambiant. Cependant, ils ont négligé la contribution des électrons de la partie isotrope de la composante ϵ_{xx} .

Après quelques hypothèses, la relation de dispersion dans l'équation (IV.3) exprimée comme :

$$\left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} - \frac{(1 + \chi_1) \lambda_i}{1 - \Gamma_0(\lambda_i)} \right) \left(\frac{-\Gamma_0(\lambda_e)}{2k_{\parallel}^2 \lambda_{De}^2} Z'(\xi_{0e}) - \frac{\Gamma_0(\lambda_i)}{2k_{\parallel}^2 \lambda_{Di}^2} Z'(\xi_{0e}) + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \chi_2 \right) = \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} - \left(\frac{\lambda_i}{1 - \Gamma_0(\lambda_i)} \right) \chi_1 \right) \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} \quad (6)$$

Dans ce qui suit, les relations de dispersion ont été établies pour deux cas d'électrons chauds, c'est-à-dire $\xi_{0e} \ll 1$ et pour les électrons froids où $\xi_{0e} \gg 1$, les ions étant supposés froids pour les deux cas, c'est-à-dire $\xi_{0i} \gg 1$.

IV.2.1. La limite cinétique de KAWs :

Pour la limite cinétique de KAWs, la vitesse de phase parallèle de l'onde est supposée inférieure à la vitesse thermique parallèle de l'électron (c'est-à-dire que les électrons sont chauds), mais supérieure que la vitesse thermique parallèle de l'ion (c'est-à-dire que les ions sont froids), c'est-à-dire $v_{t//i} \ll \omega/k_{//} \ll v_{t//e}$ et de plasma de faible bêta avec $\frac{m_e}{m_i} \ll \beta \ll 1$.

Dans ce cas limite, la relation de dispersion (IV.6) est écrite dans la forme biquadratique de ω qui est due à l'anisotropie de la température et à la contribution des ions du "composante ϵ_{zz} ". Ils ont tenu compte ici de la contribution du gyroradii à la fois des espèces ρ_i^2 et ρ_e^2 puisque leur température perpendiculaire est arbitraire.

La relation de dispersion (IV.6) devient :

$$\omega^4 - \omega^2 \left[k_{//}^2 v_A^2 \left\{ 1 + \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_i^2 + k_{\perp}^2 \rho_e^2 + \chi_1' \left(1 + \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \right) \frac{c_s^2}{v_A^2} \right\} + \right. \\ \left. k_{//}^2 c_s^2 \left\{ 1 + k_{\perp}^2 (\rho_e^2 - \rho_i^2 (1 + \chi_2')) \right\} \right] \\ + k_{//}^2 v_A^2 c_s^2 \left(1 + \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_i^2 + k_{\perp}^2 \rho_e^2 \right) \left[1 - k_{\perp}^2 \rho_i^2 \left\{ 1 + \chi_2' \left(1 + \chi_1' \frac{c_s^2}{v_A^2} \right) \right\} + \right. \\ \left. \chi_1' \frac{c_s^2}{v_A^2} \left(1 - k_{\perp}^2 \rho_i^2 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega_{pi}^2} \right) \right] = 0 \quad (IV.7)$$

Où :

$$\chi_1' = \left\{ \frac{T_{//i}}{T_{//e}} \left(1 - \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_e^2 \right) \left(\frac{T_{\perp e}}{T_{//e}} - 1 \right) + \left(1 - \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \right) \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{//i}} - 1 \right) \right\} \quad (IV.8)$$

$$\chi_2' = \left\{ \frac{T_{\perp e}}{T_{\perp i}} \left(\frac{T_{//e}}{T_{\perp e}} - 1 \right) + \left(\frac{T_{//i}}{T_{\perp i}} - 1 \right) \right\} \quad (IV.9)$$

La solution de cette équation est donnée dans les deux cas :

i. Propagation parallèle :

Dans ce cas, mettez : $k_{\perp} = 0$, la première solution de l'équation (IV.7) est :

$$\omega_1^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 \left[1 + \frac{\beta_{\parallel}}{2} \left\{ \left(\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right) + \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) \right\} \right] \quad (\text{IV.10})$$

C'est le résultat de Schlickeiser et Skoda [9]. L'équation ci-dessus représente la relation de dispersion pour une onde d'Alfvén pure dans le plasma anisotrope. L'anisotropie de la température augmente la vitesse d'Alfvén lorsque : $T_{\perp e,i} > T_{\parallel e,i}$ alors, cette équation réduit la vitesse d'Alfvén dans le cas contraire.

Maintenant, mettez $k_{\perp} = 0$ dans la deuxième solution, c'est-à-dire dans l'équation (IV.7) pour obtenir :

$$\omega_2^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2 \left(\frac{1 + \frac{c_s^2}{v_A^2} \chi_1''}{1 + \frac{c_s^2}{v_A^2} (1 + \chi_1'')} \right) \quad (\text{IV.11})$$

Où :

$\chi_1'' = \left\{ \frac{T_{\parallel i}}{T_{\parallel e}} \left(\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right) + \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) \right\}$; Qui est le mode acoustique ionique avec une anisotropie en température et une faible contribution des ions parallèles au champ magnétique ambiant.

Pour le plasma à faible bêta, c'est à dire : $\frac{c_s^2}{v_A^2} \ll 1$, le mode acoustique ionique devient indépendant de l'anisotropie de la température et prend la forme :

$$\omega_2^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2 \quad (\text{IV.12})$$

Les équations (IV.10) et (IV.11) sont les modes découplés de l'onde cinétique d'Alfvén dans l'équation (IV.7).

ii. Cas isotrope

En ignorant les anisotropies de température dans l'équation (IV.7), nous obtenons ;

$$\omega_1^2 = \left[\frac{k_{\parallel}^2 v_A^2 \left\{ 1 + k_{\perp}^2 \left(\frac{3}{4} \rho_i^2 + \rho_e^2 \right) \right\} +}{k_{\parallel}^2 c_s^2 \left\{ 1 + k_{\perp}^2 (\rho_e^2 - \rho_i^2) \right\}} \right] \times \left[1 - \frac{(1 + k_{\perp}^2 (\rho_e^2 - \rho_i^2)) \frac{c_s^2}{v_A^2}}{\left[1 + k_{\perp}^2 \left(\frac{3}{4} \rho_i^2 + \rho_e^2 \right) + (1 + k_{\perp}^2 (\rho_i^2 + \rho_e^2)) \frac{c_s^2}{v_A^2} \right]} \right] \quad (\text{IV.13})$$

On peut noter de la relation de dispersion ci-dessus que l'onde d'Alfvén cinétique reste modifiée même dans le cas isotrope. Négligeant les petits termes de correction pour le plasma bêta bas, le mode d'Alfvén cinétique standard est récupéré.

IV.2. 2. La limite inertielle de KAWs :

Pour obtenir la limite inertielle de KAWs, supposant que la vitesse de phase parallèle de l'onde est supérieure aux vitesses thermiques parallèles des électrons et des ions, c'est-à-dire

$v_{t//e,i} \ll \frac{\omega}{k_{\parallel}}$ et $\ll \frac{m_e}{m_i}$. Sous cette limite, la relation de dispersion dans l'équation (IV.6) devient :

$$\left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} - \frac{(1 + \chi_1) \lambda_i}{1 - \Gamma_0(\lambda_i)} \right) \left(\frac{k_{\perp}^2}{\omega^2} \Gamma_0(\lambda_e) + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} (\Gamma_0(\lambda_i) - \chi_2) \right) = - \left(\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} - \frac{\chi_1 \lambda_i}{1 - \Gamma_0(\lambda_i)} \right) \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} \quad (\text{IV.14})$$

D'où pour : $\xi_{0e,i} \gg 1$, ils ont utilisé : $Z'(\xi_{0e,i}) \approx \frac{1}{\xi_{0e,i}^2} = \frac{k_{\parallel}^2 v_{t//e,i}}{\omega^2}$.

La relation de dispersion ci-dessus devient comme suit :

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{3}{4} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \right) \left[\frac{k_{\parallel}^2 v_A^2 (1 - k_{\perp}^2 \rho_e^2)}{1 - k_{\perp}^2 \rho_e^2 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega_{pe}^2}} + k_{\parallel}^2 c_s^2 \chi'_1 \right] \quad (\text{IV.15})$$

Où : χ'_1 est le même terme défini dans l'équation (IV.8).

L'équation ci-dessus représente l'onde d'Alfvén inertielle en présence de l'anisotropie de la température et les gyroradii des électrons et des ions. En ignorant le gyroradii, il se réduit encore à :

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{1 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega_{pe}^2}} + k_{\parallel}^2 c_s^2 \left\{ \frac{T_{\parallel i}}{T_{\parallel e}} \left(\frac{T_{\perp e}}{T_{\parallel e}} - 1 \right) + \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) \right\} \quad (\text{IV.16})$$

Le résultat ci-dessus représente l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique résultant de l'anisotropie de la température.

IV.3. Application sur la dispersion des ondes d'Alfvén :

IV.3.1. Détermination de l'onde d'Alfvén inertielle modifiée dans les modes longitudinaux :

Nous avons déterminé l'expression (III.32) de l'anisotropie en température dans le chapitre précédent qui est donnée par :

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} = \frac{1 + a \frac{\omega_{ce}}{v_{ei}}}{1 + \frac{a \omega_{ce}}{2 v_{ei}}} \quad (\text{III.32})$$

Et pour les ions, cette expression devient :

$$\frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} = \frac{1 + a \frac{\omega_{ci}}{v_{ie}}}{1 + \frac{a \omega_{ci}}{2 v_{ie}}}$$

Où : $\omega_{ci} = \frac{ZeB}{m_i c}$ est la fréquence cyclotron ion.

Et $v_{ie} = \frac{m_e}{m_i} v_{ei}$ est la fréquence de collision ions-électrons.

Nous avons aussi déterminé la relation de dispersion dans l'expression (IV.16) pour les électrons et les ions à la fois :

$$\omega^2 = \frac{k_{//}^2 v_A^2}{1 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega_{pe}^2}} + k_{//}^2 c_s^2 \left\{ \frac{T_{//i}}{T_{//e}} \left(\frac{T_{\perp e}}{T_{//i}} - 1 \right) + \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{//i}} - 1 \right) \right\}$$

On peut réécrire cette relation mais seulement pour les ions comme suit :

$$\omega^2 = \frac{k_{//}^2 v_A^2}{1 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega_{pe}^2}} + k_{//}^2 c_s^2 \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{//i}} - 1 \right) \quad (IV.17)$$

L'équation (IV.17) dans les modes longitudinaux, c'est-à-dire lorsque ; $k_{\perp} = 0$ peut être écrite comme :

$$\omega^2 = \left\{ v_A^2 + c_s^2 \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{//i}} - 1 \right) \right\} k_{//}^2 \quad (IV.18)$$

Où : $v_A = \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 \rho}}$ représente la vitesse d'Alfvén.

Et : $c_s = \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}$ représente la vitesse du son pour les ions.

Maintenant, nous allons remplacer le rapport $\frac{T_{\perp i}}{T_{//i}}$ présenté par l'équation (III.32), dans l'équation (IV.18), nous obtenons :

$$\omega^2 = \left\{ v_A^2 + c_s^2 \left(\frac{1 + \frac{\alpha \omega_{ci}}{2 v_{ie}}}{1 + \frac{\alpha \omega_{ci}}{v_{ie}}} - 1 \right) \right\} k_{//}^2 \quad (IV.19)$$

Le résultat ci-dessus représente l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique résultant de l'anisotropie de la température.

La racine de cette équation, nous donne la fréquence angulaire ω comme:

$$\omega = \left\{ v_A^2 + c_s^2 \left(\frac{1 + \frac{a\omega ci}{2v_{ie}}}{1 + a\frac{\omega ci}{v_{ie}}} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} k_{//} \quad (\text{IV.20})$$

Dans cette équation, la fréquence angulaire ω (l'onde d'Alfvén modifiée) est en relation proportionnelle avec le nombre d'onde $k_{//}$ qui correspond aux modes longitudinaux dans l'effet acoustique ionique. Pour cela, nous avons présenté, sur la figure ci-dessous (**IV.1**), la fréquence angulaire ω en fonction du nombre d'onde $k_{//}$ avec des variations aux valeurs du champ magnétique B.

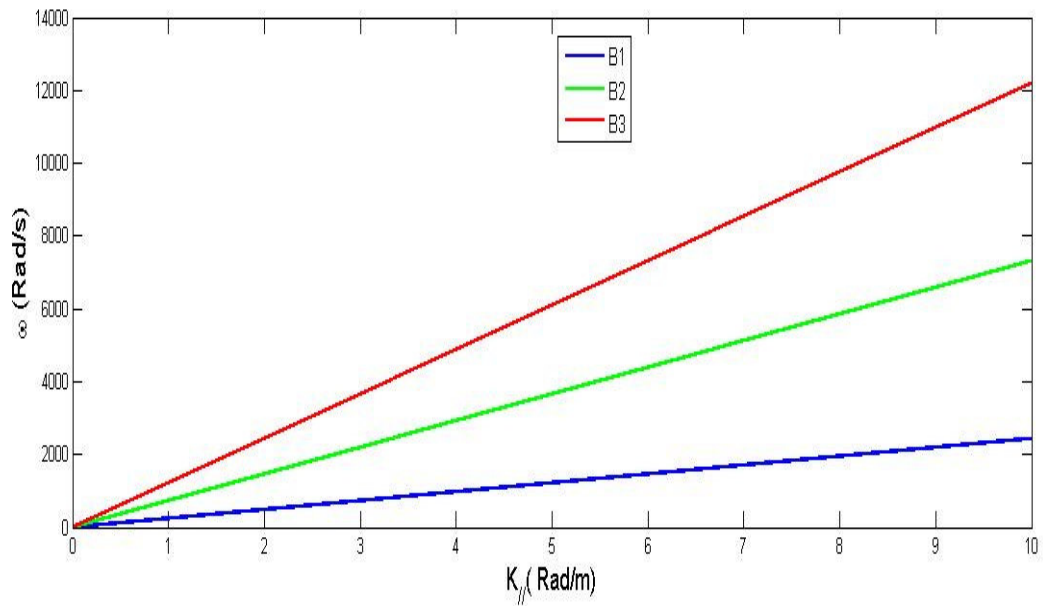


Fig. IV. 1. La fréquence angulaire ω en fonction du nombre d'onde k_{\parallel}

La figure (IV.1) montre qu'à chaque fois le nombre d'onde k_{\parallel} augmente, la fréquence angulaire ω (l'onde d'Alfvén modifiée) va augmenter aussi, donc on dit qu'il y a une relation proportionnelle entre la fréquence angulaire ω et le nombre d'onde k_{\parallel} dans les modes longitudinaux pour l'effet acoustique ionique avec des variations aux valeurs du champ magnétique B.

IV.3.2. Détermination de la vitesse du groupe :

L'expression de la vitesse du groupe dans les modes longitudinaux ($k_{\perp} = 0$) est donnée par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_{\parallel}} = \frac{d}{dk_{\parallel}} \left\{ v_A^2 + c_s^2 \left(\frac{1 + \frac{a}{2} \frac{\omega_{ci}}{v_{ie}}}{1 + a \frac{\omega_{ci}}{v_{ie}}} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} k_{\parallel}$$

Donc :

$$v_g = \left\{ v_A^2 + c_s^2 \left(\frac{1 + \frac{a\omega_{ci}}{2v_{ie}}}{1 + a \frac{\omega_{ci}}{v_{ie}}} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.21})$$

L'expression (VI.21) montre que la vitesse du groupe est comme une constante.

IV.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqué notre résultat aux résultats obtenus par **M. F. Bashir et al., [1]** qui concerne la détermination de la relation de dispersion de l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique résultant de l'anisotropie de la température dans les modes longitudinaux, c'est-à-dire lorsque : $k_{\perp} = 0$, donc nous limitons cette étude seulement pour les ions et nous négligeons l'effet des électrons.

Pour cela, nous avons montré analytiquement puis graphiquement après un calcul numérique, qu'il existe une relation proportionnelle entre la fréquence angulaire ω (l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique) et le nombre d'onde k_{\parallel} qui correspond aux modes longitudinaux,

Finalement, nous avons calculé la vitesse du groupe mais c'est trouvée comme une constante, c'est-à-dire, elle ne dépend pas du nombre d'onde k_{\parallel} .

IV.5 Références :

- [1] M. F. Bashir, Z. Iqbal, I. Aslam, G. Murtaza, AIP Journal of physics, v17, 102-112, university of Lahore, Pakistan (2010).
- [2] F. F. Chen, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Plenum, NewYork,(1984), Vol. 1.
- [3] N. Shukla, R. Mishra, P. Varma, and M. S. Tiwari, Plasma Phys. Controlled Fusion **50**, 025001 (2008).
- [4] M. Salimullah and M. Rosenberg, Phys. Lett. A **254**, 347 (1999).
- [5] N. Shukla, P. Varma, and M. S. Tiwari, Indian J. Pure Appl. Phys. **47**, 350 (2009).
- [6] W. Gekelman, S. Vincena, D. Leneman, and J. Maggs, J. Geophys. Res. **102**, 7225 (1997).
- [7] B. D. Fried and S. D. Conte, the Plasma Dispersion Function (Academic, New York, 1961).
- [8] R. L. Lysak and W. Lotko, J. Geophys. Res. **101**, 5085 (1996).
- [9] R. Schlickeiser and T. Skoda, Astrophys. J. **716**, 1596 (2010).
- [10] Slutz S A and Roger A. Vesey, Phys. Rev. Lett., 108, 025003 (2012).
- [11] Gomez M R et al., Phys. Rev. Lett. 113, 155003 (2014).
- [12] Amel Benahmed and Abdelaziz Sid. J. New Technol. Mater. Vol. 09, N°01, 107-112 (2019).
- [13] Amel Benahmed and Abdelaziz Sid. J. Phys. Conf. Ser. **1269** 012023(2019).

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Pour investiguer l'anisotropie en température dans les plasmas magnétisés dans le cadre de la théorie cinétique, nous avons commencé par un calcul analytique de la fonction de distribution électronique en se basant sur l'équation de Fokker-Planck, car c'est l'équation appropriée pour décrire ce genre de plasma. Afin de calculer la fonction de distribution électronique, en exprimant la température dans les directions parallèle et perpendiculaire. Il a été montré que la température est anisotrope et elle dépend du champ magnétique et de la fréquence des collisions, nous avons limité notre développement au second ordre, on trouve que le plasma est plus chaud dans la direction parallèle.

Nous avons fait aussi un calcul ou bien une simulation numérique pour démontrer cette anisotropie en température. Pour cela, nous avons présenté, sur la figure (III.1) l'anisotropie de la fonction de distribution. Cette figure montre que l'anisotropie est négative pour les faibles vitesses ($v \lesssim 2v_t$), ce qui correspond à un plasma plus chaud dans la direction parallèle. Cependant, dans la région à grande vitesse ($v \gtrsim 2v_t$), la composante anisotrope de f est positive et plus importante. Cela montre que les électrons rapides sont en fait responsables de l'anisotropie.

Par la suite, nous avons présenté sur la figure (III.2) du même chapitre, l'anisotropie de la température en fonction du paramètre $\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}$. Cela montre que l'anisotropie devient importante comme le champ magnétique appliqué devient intense et cette anisotropie subit une saturation au voisinage de la valeur 2.

Ce résultat analytique et numérique peut présenter et montrer des nombreuses applications pour une variété de phénomènes dans les plasmas magnétisés tels que : le transport, l'instabilité Weibel où le taux de croissance de l'instabilité dépend de $\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}$ et l'onde d'Alfvén où

la dispersion dépend de $\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}$ et ainsi d'instabilité dans le plasma de fusion et d'astrophysique, en particulier dans le schéma de fusion par inertie magnétisée (MIF).

Par conséquent, nous avons appliqué notre résultat aux résultats obtenus par **M. F. Bashir et al.**, qui concerne la détermination de la relation de dispersion de l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique résultant de l'anisotropie de la température dans les modes longitudinaux, c'est-à-dire lorsque : $k_{\perp} = 0$ dont l'effet des électrons est négligeable.

Pour cela, nous avons montré analytiquement puis graphiquement après un calcul numérique, qu'il existe une relation proportionnelle entre la fréquence angulaire ω (l'onde d'Alfvén inertielle modifiée due à l'effet acoustique ionique) et le nombre d'onde k_{\parallel} qui correspond aux modes longitudinaux. Ensuite, nous avons calculé la vitesse du groupe mais elle est trouvée comme une constante, c'est-à-dire, elle ne dépend pas du nombre d'onde k_{\parallel} .

Dans le prolongement de ce travail, nous calculerons l'anisotropie de la température pour un plasma magnétisé relativiste.

Résumé :

Dans le présent travail, nous avons explicitement calculé la fonction de distribution électronique pour le plasma magnétisé, en prenant compte des collisions électron-ion. L'équation de base dans cette investigation est celle de Fokker-Planck dans laquelle, nous avons utilisé certaines approximations qui sont justifiées dans les expériences de fusion magnétique et des plasmas d'astrophysiques. En calculant le second moment de la fonction de distribution, nous avons exprimé les températures des électrons dans la direction parallèle et dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Il a été démontré que cette température est anisotrope et cette anisotropie est due à la compétition entre l'effet de champ magnétique et l'effet de collision. Notre analyse théorique est applicable aux études d'onde et d'instabilité dans le plasma de fusion et d'astrophysique, en particulier dans le schéma de fusion par inertie magnétisée (MIF).

Mots clés : Plasma magnétisé, théorie cinétique du plasma, collisions dans le plasma.

Abstract:

In the present work, we explicitly calculated the electronic distribution function for magnetized plasma, taking into account the electron-ion collisions. The basic equation in this investigation is the Fokker-Planck equation in which, we used some approximations, which are justified in the experiments of magnetic fusion and in plasma of astrophysics. By computing the second moment of the distribution function, we have expressed the electrons temperatures in the parallel direction and in the perpendicular plane to the magnetic field. We show that this temperature is anisotropic and this anisotropy is due to competition between magnetic field effect and the collisions effect. We also present the numerical results and interpret them for illustration. Our theoretical analysis is applicable in wave and instability studies in fusion and astrophysical plasma, particularly in magnetized inertial fusion (MIF) scheme.

Keywords: magnetized plasma, plasma kinetic theory, collisions in plasma

ملخص:

في العمل الحالي، تم حساب معادلة التوزيع الإلكتروني للبلازما الممغنطة، مع مراعاة تصادمات الإلكترون-الأيون بشكل واضح. المعادلة الأساسية في هذا البحث هي معادلة فوكر-بلانك حيث تم استخدام بعض التقديرات المبررة للاندماج والبلازما الفلكية الفيزيائية الممغنطة. من خلال حساب اللحظة الثانية من معادلة التوزيع، فقد عبرنا عن درجة حرارة الإلكترونات في الاتجاه الموازي وفي المستوى العمودي إلى المجال المغناطيسي. نلاحظ أن درجة الحرارة هذه متباينة الخواص وأن سبب التباين هو التنافس بين تأثير المجال المغناطيسي وتأثير التصادم. نقدم أيضاً النتائج العددية ونفسرها للتوضيح. إن تحليلنا النظري قابل للتطبيق في دراسات الموجات وعدم الاستقرار في بلازما الفيزياء الفلكية والاندماجية، خاصة في مخطط الاندماج بالقصور الذاتي الممغنط (ميف).

الكلمات المفتاحية: البلازما الممغنطة، النظرية الحركية للبلازما،

التصادمات في البلازما.

❖ **PUBLICATIONS INTERNATIONALES :**

**1. Journal of New Technology and Materials (JNTM)
Vol.09, N°01(2019)113-119**

**INVESTIGATION OF TEMPERATURE ANISOTROPY IN HIGHLY MAGNETIZED
PLASMA**

A. Benahmed and A.Sid

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la
matière (LRPRIM), faculté des sciences de la matière, département de physique
Université de Batna 1, Algérie

**2. Journal of Physics : IOP Publishing (Conference Series)
Conf, Series 1269 (2019) 012023 Doi:10.1088/1742-
6596/1269/1/012023**

**STUDY OF TEMPERATURE ANISOTROPY IN FUSION AND ASTROPHYSICAL
MAGNETIZED PLASMA**

A. Benahmed and A.Sid

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la
matière (LRPRIM), faculté des sciences de la matière, département de physique
Université de Batna 1, Algérie

❖ **COMMUNICATIONS INTERNATIONALES :**

1. A 26th IAEA Fusion Energy Conference, Kyoto, Japan, 17-22 October 2016

TEMPERATURE ANISOTOPY IN MAGNETIZED PLASMA

A.Sid and A. Benahmed

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique
Université de Batna 1, Algérie

2. The international seminar on plasma physics SIPP'2011 (Ouargla, du 13 au 15 Février 2011)

STUDY OF ALFVEN WAVES IN STELLAR PLASMAS AND IN PLASMA OF MAGNETIC confinement (TOKAMAK)

A. Benahmed and A.Sid

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique
Université de Batna, Algérie

3. The 8th international conference on progress in theoretical physics (Constantine, 23-25 October 2011)

ALFVEN WAVES IN PLASMA OF MAGNETIC CONFINEMENT (TOKAMAK)

A. Benahmed and A.Sid

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique -Université de Batna, Algérie

**4. The fourth international seminar on lasers and applications SILA2012
(Constantine, 13-15 October 2012)**

A satisfactory treatment for the processes and mechanisms of laser

A. Lecheheb¹ and **A. Benahmed**²

¹Laboratoire de physique mathématique & subatomique (LPMPS), faculté des sciences, département de physique, Université Mentouri de Constantine, Algérie

²Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique, Université de Batna 1, Algérie

**5. The third international seminar on lasers and applications
SILA2010(Constantine, 14-16 may, 2010)**

Study of Laser by the Quantum Theory

A. Lecheheb¹ and **A. Benahmed**²

¹Laboratoire de physique mathématique & subatomique (LPMPS), faculté des sciences, département de physique, Université Mentouri de Constantine, Algérie

²Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique, Université de Batna 1, Algérie

❖ **COMMUNICATIONS NATIONALES :**

**1. The third Algerian Workshop on Astronomy & Astrophysics
(Constantine, Algeria 16-17 June 2010)**

STUDY OF ALFVEN WAVES IN STELLAR PLASMA

A. Benahmed and A.Sid

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la
matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de
physique
Université de Batna 1, Algérie

**2. 6^{ème} Séminaire national sur le laser et ses applications SENALAP'2012
(El-Oued university- les 17&18 Janvier 2012)**

**TRAITEMENT DES PROCESSUS ET DES MECHANISMES DU LASER PAR UNE
APPROCHE PLUS SATISFAISANTE**

A. Lecheheb¹ and **A. Benahmed**²

¹Laboratoire de physique mathématique & subatomique (LPMPS), faculté des
sciences, département de physique, Université Mentouri de Constantine,
Algérie

²Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la
matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de
physique, Université de Batna 1, Algérie

3. The first workshop on matter and radiation WMR'2016 (Batna University 1, from 10 to 11 April 2016).

INVESTIGATION OF TEMPERATURE ANISOTOPY IN TOKAMAK PLASMA

A.Sid and **A. Benahmed**

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique
Université de Batna 1, Algérie

4. The Fourth Algerian Conference on Astronomy & Astrophysics (Khenchela, Algeria 27-29 March 2017)

**STUDY OF TEMPERATURE ANISOTOPY IN FUSION AND IN ASTROPHYSICAL
MAGNETIZED PLASMA**

A.Sid and **A. Benahmed**

Laboratoire de physique des rayonnements et de leurs interactions avec la matière (PRIMALAB), faculté des sciences de la matière, département de physique
Université de Batna 1, Algérie

PAPER • OPEN ACCESS

Study of temperature anisotropy in fusion and astrophysical magnetized plasma

To cite this article: Amel Benahmed and Abdelaziz Sid 2019 *J. Phys.: Conf. Ser.* **1269** 012023

View the [article online](#) for updates and enhancements.



IOP | ebooks™

Bringing you innovative digital publishing with leading voices to create your essential collection of books in STEM research.

Start exploring the collection - download the first chapter of every title for free.

Study of temperature anisotropy in fusion and astrophysical magnetized plasma

Amel BENAHMED and Abdelaziz SID*

Laboratory of Physics of Rays and their Interactions with Matter (LRPRIM),
Department of physics, Faculty of matter sciences, University of Batna 1, Algeria

abdelaziz.sid@univ-batna.dz

Abstract. We investigate the temperature anisotropy in highly magnetized plasma within the framework of kinetic theory. We explicitly calculate the electronic distribution function for a magnetized plasma, taking into account electron-ion (e-i) collisions. The basic equation in this investigation is the Fokker-Planck (F-P) equation, where some justified approximations for fusion and astrophysical magnetized plasmas are used. By computing the second moment of this distribution function, we have expressed the electron temperatures in the parallel direction as well as in the plane perpendicular to the magnetic field. We show that the temperature is anisotropic and that this anisotropy is due to a competition between the magnetic field and the collision effects. We also present the numerical results and interpret them for illustration. Our theoretical analysis is applicable in wave and instability studies in fusion and astrophysical plasma, particularly in magnetized inertial fusion (MIF) scheme.

Keywords: magnetized plasma; plasma kinetic theory; collisions in plasma

1. Introduction

A magnetized plasma is one in which an ambient magnetic field is strong enough to significantly alter particle trajectories. This kind of plasma is a good environment for different physical phenomena which have intensively been studied in literature, namely, Alfvén wave [1,2], cyclotron instabilities [3], and magnetic field reconnection [4,5].

Magnetized plasma, both in astrophysical medium or that created in laboratories, generally presents an anisotropy in temperature [6] which can be interpreted in the microscopic way by an anisotropic distribution function.

In the literature, this distribution function is usually assumed to be a bi-Maxwellian distribution function:

$$f_{BM}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{n_e}{T_{\perp} T_{\parallel}^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{m_e v_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}}\right) \exp\left(-\frac{m_e v_{\perp}^2}{2T_{\perp}}\right) \quad (1)$$

Where m_e , n_e , T_{\parallel} , T_{\perp} , v_{\parallel} and v_{\perp} are respectively the electron mass, the electronic density, the parallel temperature, the perpendicular temperature, the parallel velocity and the perpendicular velocity. The aim of the present paper is to analyze the electron temperature anisotropy for magnetized plasma, in the frame of the kinetic theory. This investigation could have applications in several



research axes, such as magnetic fusion experiments [7,8].

The magnetized plasma appears at the microscopic level as a set of charged particles of different species in thermal motion at different velocities, where each particle has a fast gyration motion around the magnetic field line at a perpendicular velocity v_{\perp} , and a parallel motion not affected by the magnetic field. The time dependent electron velocity can be written as: $\vec{v}(t) = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}(t)$, where $\vec{v}_{\perp}(t)$ is the time varying perpendicular velocity which is proportional to $\exp(i\omega_{ce}t)$, where $\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$ is the electron cyclotron frequency and B is the applied magnetic field. Note here that ω_{ce} is the same for all electrons in the plasma [9]. In order to compute the electronic distribution function, we consider for the one particle kinetic theory in 6D phase space: (\vec{r}, \vec{v}) . The Fokker Planck (F-P) equation is then the appropriate equation for describing these kinds of plasmas [10], where the distribution depends on the three independent parameters: v_{\parallel}, v_{\perp} and the time t .

In the present investigation, we consider that the time evolution of the electron distribution function is characterized by two time scales as was the case in our previous works [11-15]: a short time scale relative to the cyclotron motion of electrons around the magnetic field lines, $\tau_{ce} = \frac{1}{\omega_{ce}}$ (which has typical values of $\tau_{ce} \sim 10^{-11}$ s for magnetic thermonuclear fusion experiments, where $\omega_{ce} \sim 10^{11}$ s $^{-1}$) and a relatively long hydrodynamic time scale ($\tau_{hy} \gg \tau_{ce}$).

This paper is organized as follows: in section 2, we present the basic equation used in this investigation. In section 3, the equation of the distribution function is analytically calculated under some justified approximations. In section 4, we compute the high frequency distribution function. In section 5, we compute the static distribution function. In section 6, we compute the parallel temperature and the perpendicular one, where the anisotropy in temperature is explicitly presented. Finally, in section 7, a conclusion is given for the obtained results.

2. Basic equation

The basic equation in this investigation is the Fokker-Planck (F-P) equation. The F-P equation can be presented for a homogeneous plasma, in the presence of the Lorentz force due to a static magnetic field, $\vec{F}_L(t) = -e\vec{v}(t) \times \vec{B}$, taking into account the e-i Coulomb collisions, following the Braginskii notation [16,17] as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{F}_L}{m_e} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C_{ei}(f), \quad (2)$$

where $f = f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ is the electrons distribution function and $C_{ei}(f)$ represents the e-i operator. Note here that the distribution function depends on the three independent parameters (v_{\parallel}, v_{\perp} and t) and the Lorentz force is a time dependent force.

Without loss of generality we consider the magnetic field to be oriented in the x direction, $\vec{B} = B\hat{x}$, and the electrons to oscillate in the (y, z) plane, where:

$\vec{v}_{\perp}(t) = v_{\perp}(\hat{z} - i\hat{y}) \exp(i\omega_{ce}t)$. With this geometry, the Lorentz force is given by:

$$\vec{F}_L = -m_e \omega_{ce} v_{\perp} (\hat{y} + i\hat{z}) \exp(i\omega_{ce}t). \quad (3)$$

This force is similar to that due to the presence of a circularly-polarized laser wave in the plasma [11]. Taking Eq. (3) into account, the F-P equation (Eq. 2) is written as:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \omega_{ce} v_{\perp} \left(\frac{\partial f}{\partial v_y} + i \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) \exp(i\omega_{ce}t) = C_{ei}(f). \quad (4)$$

We point out that this equation (Eq. 4) is similar to that which characterizes a homogenous plasma in interaction with a circularly polarized laser wave [11, 13]. Then we be expecting an anisotropy in temperature due to the presence of magnetic field.

3. Distribution function

The motion of individual charged particle in plasma, in the presence of a static magnetic field, can be decomposed into a parallel motion not affected by the magnetic field and a perpendicular gyration motion.

The gyration period time is typically very small compared to the hydrodynamic evolution time of the plasma. Then it is judicious to separate the time scales in the F-P equation, (Eq. 4), by assuming that the distribution function is the sum of oscillating distribution function and a static one relative to evolution of hydrodynamic parameters in the plasma. Hence, we write:

$$f = f(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) = f^s(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) + \text{Real}\{f^h(\vec{v}, t)\}, \quad (5)$$

$$f^h(\vec{v}, t) = f^h(v_{\parallel}, v_{\perp}) \exp(i\omega_{ce}t). \quad (6)$$

The separation of time scales in the F-P equation, (Eq. 4), using Eq. (5), gives rise to a system of two coupled equations: a fast time variation equation which represents the spatiotemporal evolution of f^h and a slow time variation equation representing the spatiotemporal evolution of f^s . Thus:

$$\frac{\partial f^h}{\partial t} - \omega_{ce}v_{\perp} \left(\frac{\partial f^s}{\partial v_y} + i \frac{\partial f^s}{\partial v_z} \right) \exp(i\omega_{ce}t) = C_{ei}(f^h), \quad (7)$$

This equation is obtained by regrouping the fast time-varying terms, proportional to $\exp(i\omega_{ce}t)$, in Eq. (4).

The equation of the static distribution function is obtained by taking the average of Eq. (4) on the cyclotron period, $\tau_{ce} = \frac{2\pi}{\omega_{ce}}$, so:

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} - \omega_{ce}v_{\perp} \left\langle \frac{\text{Real}(\exp(i\omega_{ce}t)) \times \left(\frac{\partial f^h}{\partial v_y} + i \frac{\partial f^h}{\partial v_z} \right)}{\text{Real}(\exp(i\omega_{ce}t))} \right\rangle_{\tau_{ce}} = C_{ei}(f^s) \quad (8)$$

Here the symbol $\langle X \rangle_{\tau_{ce}} = \frac{1}{\tau_{ce}} \int_0^{\tau_{ce}} X dt$ stands for the average value over the cyclotron period time.

4. High-frequency distribution function

Using expression (6), f^h can be calculated from equation (7), where $\frac{\partial f^h}{\partial t} = i\omega_{ce}f^h$, as a function of f^s . Thus:

$$i\omega_{ce}f^h - C_{ei}(f^h) = \omega_{ce}v_{\perp} \left(\frac{\partial f^s}{\partial v_y} + i \frac{\partial f^s}{\partial v_z} \right) \exp(i\omega_{ce}t). \quad (9)$$

The collision operator, $C_{ei}(f)$, is expressed in Landau form of the F-P collision operator [18,19,20] as:

$$C_{ei}(f^s) = \frac{A}{v^3} \frac{\partial}{\partial v_j} (v_j v_k - v^2 \delta_{jk}) \frac{\partial f^s}{\partial v_k}, \quad (10)$$

where $A = \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}}$, $\lambda_{ei} = \frac{4\pi\epsilon_0 T_e^2}{n_e e^4 Z \ln \Lambda}$ is the mean free path, $v_{ei} = \frac{1}{2} \frac{v_t}{\lambda_{ei}}$ and $v_t = \sqrt{T_e/m_e}$ is the thermal velocity. Note that we used Einstein's notation in equation (10).

The e-i collision operator (10) has the spherical-harmonics like proper functions [21-23]. Then it is

judicious to use the spherical system $(v, \mu = \frac{v_x}{v}, \varphi = \arctg \frac{v_y}{v_z})$. The right hand side of equation (9) is written then as:

$$\omega_{ce} \left((1 - \mu^2)^{3/2} \left(v \frac{\partial f^s}{\partial v} + \mu \frac{\partial f^s}{\partial \mu} \right) \right) \times \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi). \quad (11)$$

This shows that f^h is proportional to $\exp(i\varphi)$ and f^s is independent of φ . It is therefore practical to expand $f^s(\vec{v}) = f^s(\mu, v)$ in Legendre polynomials, $P_l(\mu)$:
 $f^s = \sum P_l(\mu) f_l^s(v)$, and to expand the function $f^h = f^h(\mu, v) \exp i(\omega_{ce}t + \varphi)$, in spherical harmonics, $Y_l^1(\mu, \varphi)$, of order $(l, m = 1)$:

$f^h = \sum_{l=0}^{l=\infty} Y_l^1(\mu, \varphi) f_l^h(v) \exp(i\varphi) \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1(\mu) f_l^h(v)$, where $P_l^1(\mu)$ is the associated Legendre polynomial of order $(l, m = 1)$. Considering these expansions, the high frequency equation, (8), can be written as:

$$\left(i\omega_{ce} + l(l+1) \frac{A}{v^3} \right) \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 f_l^h(v) = -\omega_{ce} \left\{ (1 - \mu^2)^{3/2} \left(v \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l \frac{\partial f_l^s}{\partial v} + \mu \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{\partial P_l}{\partial \mu} f_l^s \right) \right\}. \quad (12)$$

After some algebra using recurrence relations between Legendre polynomials and associated Legendre polynomials [21], we demonstrate in Appendix A that:

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l = \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 (G_1(l) v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v} + G_2(l) v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v} + G_3(l) v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v} + G_4(l) v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v}), \quad (13)$$

$$\text{where } G_1(l) = \frac{(l-2)(l-1)}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)},$$

$$G_2(l) = -\left(\frac{l(l+1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(2l-3)(2l-1)(2l+1) - l^2(2l-3) - (l-1)^2(2l+1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)} \right),$$

$$G_3(l) = \frac{(2l+1)(2l+3)(2l+5) - (l+2)^2(2l+1) - (l+1)^2(2l+5)}{(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} + \frac{(l+1)l}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)}$$

$$\text{and } G_4(l) = -\frac{(l+3)(l+2)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)}.$$

We also demonstrate in Appendix B that:

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} (1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{\partial P_l}{\partial \mu} f_l^s = \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 (G_5(l) f_{l-3}^s + G_6(l) f_{l-1}^s + G_7(l) f_{l+1}^s + G_8(l) f_{l+3}^s), \quad (14)$$

$$\text{where } G_5(l) = \frac{(l-3)(l-2)^2}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)}, \quad G_6(l) = -\frac{(2l+3)(l-1)l[(l-2)(2l+1) + (l+1)(2l-3)] + (l-1)l^2(2l-3)(2l-1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)},$$

$$G_7(l) = \frac{(2l-1)(l+1)(l+2)[l(2l+5) - (l+3)(2l+1)] - (l+1)^2(l+2)(2l+3)(2l+5)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)}$$

$$\text{and } G_8(l) = \frac{(l+3)^2(l+4)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}.$$

Using Eqs. (13) and (14), equation (12) is written as follows:

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} (i\omega_{ce} + \frac{A}{v^3} l(l+1)) P_l^1 f_l^h = -\omega_{ce} \exp(i\omega_{ce}t + i\varphi) \sum_{l=0}^{l=\infty} P_l^1 [G_1(l) v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v} + G_2(l) v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v} + G_3(l) v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v} + G_4(l) v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v} + G_5(l) f_{l-3}^s + G_6(l) f_{l-1}^s + G_7(l) f_{l+1}^s + G_8(l) f_{l+3}^s]. \quad (15)$$

Projecting this equation on the associated Legendre polynomial, $P_l^1(\mu)$, allows us to compute the f_l^h

as functions of $f_{l-3}^s, f_{l-1}^s, f_l^s, f_{l+1}^s$ and f_{l+3}^s , hence:

$$f_l^h = [G_1(l)v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v} + G_2(l)v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v} + G_3(l)v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v} + G_4(l)v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v} + G_5(l)f_{l-3}^s + G_6(l)f_{l-1}^s + G_7(l)f_{l+1}^s + G_8(l)f_{l+3}^s]i\exp(i\omega_{ce}t + i\varphi), \quad (16)$$

Note that in this equation, the highly-magnetized plasma approximation ($\omega_{ce} \gg \nu_{ei}$) is used.

The first three components of f^h are given by:

$$f_1^h = \left[-\frac{4}{5}v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} + \frac{8}{35}v \frac{\partial f_2^s}{\partial v} - \frac{4}{105}v \frac{\partial f_4^s}{\partial v} - \frac{6}{7}f_2^s + \frac{4}{21}f_4^s \right]i\exp(i\omega_{ce}t + i\varphi), \quad (17)$$

$$f_2^h = \left[-\frac{4}{21}v \frac{\partial f_1^s}{\partial v} + \frac{8}{63}v \frac{\partial f_3^s}{\partial v} - \frac{20}{693}v \frac{\partial f_5^s}{\partial v} - \frac{6}{35}f_1^s - \frac{8}{21}f_3^s + \frac{50}{231}f_5^s \right]i\exp(i\omega_{ce}t + i\varphi), \quad (18)$$

$$f_3^h = \left[\frac{2}{15}v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} - \frac{2}{15}v \frac{\partial f_2^s}{\partial v} + \frac{46}{495}v \frac{\partial f_4^s}{\partial v} + \frac{10}{429}v \frac{\partial f_6^s}{\partial v} - \frac{48}{175}f_2^s - \frac{28}{99}f_4^s + \frac{28}{143}f_6^s \right]i\exp(i\omega_{ce}t + i\varphi). \quad (19)$$

5. Static distribution function

The second term in the left-hand side of the static distribution function equation, Eq. (8), can be written using spherical coordinates as:

$$\omega_{ce} \langle \text{Real}(v_{v_1} \exp(i\omega_{ce}t)) \times \text{Real}\left(\frac{\partial f^h(v, \mu, \varphi, t)}{\partial v_y} + \frac{\partial f^h(v, \mu, \varphi, t)}{\partial v_z}\right) \rangle_{\tau_{ce}} = \frac{\omega_{ce}}{2} (1 - \mu^2)^{3/2} \times \left(v \frac{\partial f^h(v, \mu)}{\partial v} - \mu \frac{\partial f^h(v, \mu)}{\partial \mu} + \frac{f^h(v, \mu)}{(1 - \mu^2)} \right). \quad (20)$$

The equation of the static distribution function is then given in the spherical coordinates by:

$$\frac{\omega_{ce}}{2} (1 - \mu^2)^{3/2} = \frac{A}{v^3} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f^s(v, \mu)}{\partial \mu} \right). \quad (21)$$

We expand, as in the section 4, the $f^s(v, \mu)$ in $P_l(\mu)$ and the $f^h(v, \mu)$ in the $P_l^1(\mu)$, hence:

$$\frac{\omega_{ce}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ v \frac{\partial f_l^h}{\partial v} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l^1 - (1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{\partial P_l^1}{\partial \mu} f_l^h + (1 - \mu^2)^{1/2} P_l^1 f_l^h \right\} = \frac{A}{v^3} \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) P_l f_l^s. \quad (22)$$

After some algebra similar to that presented in appendices A and B, using recurrence relations between Legendre polynomials, $P_l(\mu)$, and associated Legendre polynomials, $P_l^1(\mu)$, Equation (22) is written as follows:

$$\frac{\omega_{ce}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} P_l \left[G_9(l)v \frac{\partial f_{l-3}^h}{\partial v} + G_{10}(l)v \frac{\partial f_{l-1}^h}{\partial v} + G_{11}(l)v \frac{\partial f_{l+1}^h}{\partial v} + G_{12}(l)v \frac{\partial f_{l+3}^h}{\partial v} + G_{13}(l)f_{l-3}^h + G_{14}(l)f_{l-1}^h + G_{15}(l)f_{l+1}^h + G_{16}(l)f_{l+3}^h \right] = \frac{A}{v^3} \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) P_l f_l^s(v), \quad (23)$$

where $G_9(l) = -\frac{(l-3)(l-2)(l-1)l}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)}$,

$$G_{10}(l) = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(l-1)l[(l-1)(l+1)(2l-3) + l(l-2)(2l+1) + (2l+1)(2l-1)(2l-3)]}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)}$$

$$G_{11}(l) = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} - \frac{(l+1)(l+2)[(l+1)(l+3)(2l+1) + (l+2)l(2l+5) + (2l+5)(2l+3)(2l+1)]}{(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)}$$

$$G_{12}(l) = \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)}, \quad G_{13}(l) = \frac{(l-3)^2(l-2)(l-1)2l}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)},$$

$$G_{14}(l) = -\frac{l^3(l-1)^2(l-2)}{(2l-3)(2l-1)^2} - \frac{(l+1)l^2(l-1)^3}{(2l+1)(2l-1)^2} - \frac{(l-1)^2l(l+1)^2(l+2)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(l-1)l}{(2l-1)}$$

$$G_{15}(l) = \frac{(l+2)^3(l+1)^2l}{(2l+1)(2l+3)^2} + \frac{(l+3)(l+2)^2(l+1)^3}{(2l+5)(2l+3)^2} + \frac{(l+2)^2(l+1)l^2(l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} - \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3}$$

$$\text{and } G_{16}(l) = -\frac{(l+4)^2(l+3)(l+2)^2(l+1)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}.$$

This equation coupled with the f_l^h formula, (Eqs. 16-19), allows us to determinate the different components, $f_l^s(v)$, of the static distribution function. Thus:

For the zeroth order ($l = 0$):

$$\frac{\omega_{ce}}{2} \left(\frac{4}{5} v \frac{\partial f_1^h}{\partial v} - \frac{8}{35} v \frac{\partial f_3^h}{\partial v} - \frac{32}{35} f_3^h + \frac{4}{5} f_1^h \right) = 0. \quad (24)$$

For the first order ($l = 1$):

$$f_1^s = \frac{1}{4} \frac{\omega_{ce}}{\vartheta_{ei}(v)} \left[\frac{216}{175} v \frac{\partial f_2^h}{\partial v} - \frac{8}{21} v \frac{\partial f_4^h}{\partial v} - \frac{40}{21} f_4^h + \frac{12}{175} f_2^h \right], \quad (25)$$

where $\vartheta_{ei}(v)$ is the velocity-dependent frequency relative to electrons having a velocity v .

For the second order ($l = 2$):

$$f_2^s = \frac{1}{12} \frac{\omega_{ce}}{\vartheta_{ei}(v)} \left(\frac{36}{35} v \frac{\partial f_1^h}{\partial v} - \frac{96}{35} v \frac{\partial f_3^h}{\partial v} - \frac{40}{77} v \frac{\partial f_5^h}{\partial v} - \frac{960}{77} f_5^h - \frac{2}{7} f_1^h + \frac{68}{7} f_3^h \right). \quad (26)$$

Neglecting higher-order components behind the f_0^s component, considering that $f_{l+2}^s \ll f_l^s$, this last equation can be written as:

$$f_2^s = \frac{\omega_{ce}}{12\vartheta_{ei}(v)} \times \left(-0.06857 v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} + 0.01904 v \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f_0^s}{\partial v} \right) \right). \quad (27)$$

Note that equation (23) represents a recurrence relation between different components of f^s . This allows us to determinate the distribution function by knowing f_0^s as a boundary condition. The zeroth-order static distribution function corresponds to the non-perturbed (by the magnetic field) distribution function of electrons. This distribution function can then be estimated by considering the thermodynamic equilibrium as a Maxwell function. At this order (zero), the high frequency function vanishes.

6. Temperature anisotropy

By limiting the expansion of the distribution function in Legendre polynomials to second order, the parallel temperature $T_{\parallel} = \overline{m_e v_{\parallel}^2}$, where the symbol $\overline{\quad}$ stands for average value, is given by:

$$n_e T_{\parallel} = m_e \int v_{\parallel}^2 f d^3 \vec{v} = \pi m_e \int \mu^2 v^4 \left\{ \begin{array}{l} f_0(v) + P_1(\mu) f_1(v) \\ P_2(\mu) f_2(v) \end{array} \right\} dv d\mu = \frac{4}{3} \pi m_e \int v^4 \{f_0(v)\} dv - \frac{8}{15} \pi m_e \int v^4 \{f_2(v)\} dv. \quad (28)$$

It is important to note that the high-frequency distribution function does not contribute to the temperature since its average over the cyclotron period time vanishes [$f^h \sim \exp(i\omega_{ce}t)$]. The zeroth order distribution function corresponding to the plasma not being affected by the magnetic field is considered to be a Maxwellian :

$f_0(v) = \frac{n_e}{v_t^3 (2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)$. Consequently, the second anisotropic distribution function (Eq. 27), can be written as follow:

$$f_2^s = -\frac{\omega_{ce}}{v_{ei}} \frac{n_e}{v_t^3 (2\pi)^{3/2}} \times \left(0.011809 \frac{v^5}{v_t^5} - 0.0057 \frac{v^7}{v_t^7} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right). \quad (29)$$

Computing the integral in Eq. (28), the explicit expression of T_{\parallel} is found to be:

$$T_{\parallel} = T \left(1 + a \frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \right), \quad (30)$$

where ν_{ei} is the e_i collision frequency and $a \approx 1.93$.

The perpendicular temperature, $T_{\perp} = \frac{1}{2} \overline{m_e v_{\perp}^2}$, is given by:

$$n_e T_{\perp} = \frac{1}{2} m_e \int v_{\perp}^2 f d^3 \vec{v} = m_e \int (1 - \mu^2) v^4 (f_0 + \mu f_1 + \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) f_2) dv d\mu = \frac{4}{3} \pi m_e \int v^4 f_0 dv - \frac{4}{15} \pi m_e \int v^4 f_2 dv. \quad (31)$$

In the case of the Maxwellian isotropic distribution function, the T_{\perp} is calculated explicitly from the above equation to be:

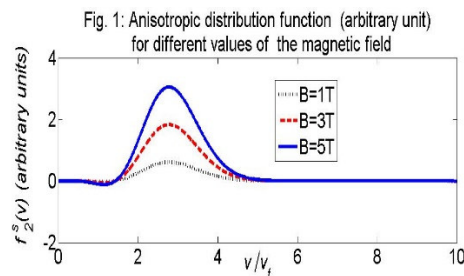
$$T_{\perp} = T \left(1 + \frac{a}{2} \frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \right). \quad (32)$$

The temperature anisotropy is then given by:

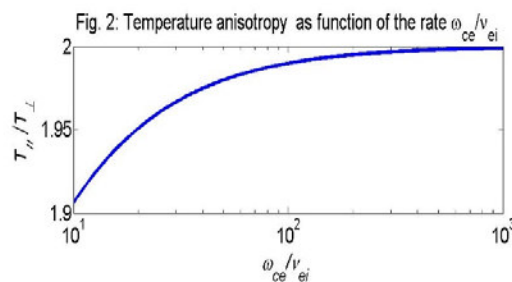
$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} = \frac{1 + a \frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}}{1 + \frac{a}{2} \frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}}. \quad (33)$$

It is very clear that this anisotropy depends on the ratio of the cyclotron frequency to the collision frequency. This equation shows that the anisotropy tends to 1 for a high collision frequency ($\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \ll 1$) which is in agreement with the 1D numerical simulation carried out by Takizuka et al. [24], despite that Eq. (33) is limited to highly magnetized plasma ($\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}} \gg 1$).

We have presented, on the Fig. 1, the anisotropy on the distribution function.



This figure shows that the anisotropy is negative for low velocities ($v \lesssim 2v_t$) which corresponds to a hotter plasma in the parallel direction. However in the high velocity region ($v \gtrsim 2v_t$) the anisotropic component of f is positive and more important. This shows that the fast electrons are in fact responsible for the anisotropy. We present in Fig. 2 the temperature anisotropy as a function of the parameter $\frac{\omega_{ce}}{\nu_{ei}}$.



This shows that the anisotropy becomes important as the applied magnetic field becomes intense, and this anisotropy undergoes a saturation in the vicinity of the value 2.

7. Conclusion

To investigate the temperature anisotropy in magnetized plasma we have analytically calculated the distribution function for a highly-magnetized plasma. Using this distribution function, we have calculated the temperature in the parallel and perpendicular directions. We have shown that the temperature is anisotropic and that it is depend on the magnetic field and on the collision frequency. The numerical calculus shows that the anisotropic distribution function is negative in low-velocities region and positive in high-velocity region over a larger band, where the maximum is more important than the minimum. This shows that fast particles are responsible for the temperature anisotropy.

In this study, we have limited the expansion of the distribution function to second order which is sufficient for the study of some physical phenomena occurring in magnetized plasma such as Weibel instability. The plasma is hotter in the parallel direction which can be interpreted by the fact the plasma heating by momentum transfer due to collision is more efficient in the parallel direction. This analytical result could have applications for several physical phenomena occurring in magnetized plasma: the Weibel instability where the growth rate of instability depends on $\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}$ and the Alfvén wave where dispersion depends on $\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}$. As an extension to this work, we will calculate the temperature anisotropy for a relativistic magnetized plasma.

Acknowledgments

This work is partially presented in the 26th IAEA Fusion Energy Conference organized in Kyoto, Japan (October 2016) and in the first workshop on matter and radiation organized at Batna University (April 2016).

We are very thankful to Pr. Mikhail Shmatov from IOFFE institute (St. Petersburg, Russia) for fruitful discussions.

References

- [1] Gedalin M, *Phys. Rev. E*, 47, 4354 (1993).
- [2] Grigor'ev I A and Pastukhov V P, *Plasma Physics Reports*, Vol. 34, No. 4, 265 (2008).
- [3] Tajima T, Mima K, and Dawson J M, *Phys. Rev. Lett.*, 39, 201 (1977).
- [4] Kundu R and White S M, *Adv. Space Res.* Vol 10, (9) 85 (1990).
- [5] Shay M A, Drake J F, Rogers B N and Denton R E, *Geophys. Rev. Lett.*, Vol. 26, NO. 14, 2163 (1999).
- [6] Adnan M, Mahmood S, and Qamar A, *Contrib. Plasma Phys.*, 45, 724 (2014).
- [7] Sultz S A and Roger A. Vesey, *Phys. Rev. Lett.*, 108, 025003 (2012).
- [8] Gomez M R et al., *Phys. Rev. Lett.* 113, 155003 (2014).
- [9] Hasegawa A, *Physica Scripta*. Vol. 2005, T116, 72 (2005).
- [10] Peeters A G and Strintzi D, *Ann. Phys. (Berlin)*, 17, No. 2 – 3, 142 (2008).
- [11] Bendib A, Bendib K and Sid A, *Phys. Rev. E*, 55, 7522 (1997).

- [12] Bendib K, Bendib A and Sid A, *Laser and Particle Beams*, 16, 3, 473 (1998).
- [13] Sid A, *Phys. of Plasmas*, 10, 214 (2003).
- [14] Sid A and Benahmed A, *26th IAEA Fusion Energy Conference; Kyoto, Japan, 17-22 October 2016*.
- [15] Langdon A B, *Phys. Rev. Lett.* 44, 575 (1980).
- [16] Braginskii S I, *Reviews of plasma Physics* (M. A. Leontovich., Consultants Bureau, N. Y.1965, (Vol. 1).
- [17] Shkarofsky I P, Johnston T W and Bachynski M P, *The particle Kinetics of Plasmas* (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1966).
- [18] Chandrasekhar S, *Rev. Modern Phys.* 15, 1 (1943); *Astrophys. J.* 97, 255 (1943).
- [19] Rosenbluth M N, MacDonald W and Judd D, *Phys. Rev.*, 107, 1 (1957).
- [20] Spitzer L, *Physics of Fully Ionized Gases* (Interscience, New York, 1962) Chap.5.
- [21] Abramowitz M and Stegun I, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York 1970).
- [22] Chang Y B and Li D, *Phys. Rev. E* 53, 3999 (1996).
- [23] Baumjohann W and Treumann R A, *Basic Space Plasma Physics*, (Imperial College Press, London, 1997).
- [24] Takizuka Tet al., *J. Nucl. Mater.* 128-9, 104 (1984).

Appendix A

In order to establish Eq. 13, we use the recurrence relation between associated Legendre polynomials demonstrated in (Ref. 21) for all orders $l \geq 0$ and $0 \leq m \leq l$:

$$\mu P_l^m = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}^m + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}^m. \quad (\text{A1})$$

For $m = 0$ Eq. (A1) is written as:

$$\mu P_l^0 = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}^0 + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}^0. \quad (\text{A2})$$

Multiplying Eq. (A2) by μ , we find:

$$\mu^2 P_l^0 = \frac{l+1}{2l+1} \mu P_{l+1}^0 + \frac{l}{2l+1} \mu P_{l-1}^0, \quad (\text{A3})$$

where μP_{l+1}^0 and μP_{l-1}^0 are given by Eq. (A2) for $l \mapsto l+1$ and $l \mapsto l-1$ respectively.

Substituting Eq.(A2) into Eq. (A3), we find:

$$\mu^2 P_l^0 = \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} P_{l+2}^0 + \left(\frac{(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} + \frac{l^2}{(2l+1)(2l-1)} \right) P_l^0 + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)} P_{l-2}^0 \quad (\text{A4})$$

and then:

$$(1 - \mu^2) P_l^0 = - \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} P_{l+2}^0 + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} P_l^0 - \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)} P_{l-2}^0. \quad (\text{A5})$$

Multiplying this equation by $\sqrt{1 - \mu^2}$, we get:

$$(1 - \mu^2)^{3/2} P_l^0 = -\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l+2}^0 + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_l^0 - \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l-2}^0. \quad (\text{A6})$$

It has been demonstrated in (Ref. 21) that for all l and m :

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l^m = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^{m+1} - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^{m+1} \quad (\text{A7})$$

This equation can be written for: $(l+2, m=0)$, $(l, m=0)$ and $(l-2, m=0)$ as follows:

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_{l+2}^0 = \frac{1}{2l+5} P_{l+1}^1 - \frac{1}{2l+5} P_{l+3}^1. \quad (\text{A8})$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l^0 = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^1 - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^1, \quad (\text{A9})$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_{l-2}^0 = \frac{1}{2l-3} P_{l-3}^1 - \frac{1}{2l-3} P_{l-1}^1. \quad (\text{A10})$$

By substitution of these Eqs. (A8), (A9) and (A10) into Eq. (A6), we get:

$$(1 - \mu^2)^{3/2} P_l^0 = -\frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} P_{l-3}^1 + \left(\frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} \right) P_{l-1}^1 - \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l+1}^1 + \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1. \quad (\text{A11})$$

Multiplying this equation by f_l^s and summing over all l , we get:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l^0 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} &= -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} P_{l-3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} + \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} \right) &P_{l-1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} - \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \right. & \\ \left. \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) &P_{l+1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

It is practical to shift the summation in the right hand side of this equation as follows:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} P_{l-3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+3)(l+2)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)} P_l^1 v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v}, \quad (\text{A13})$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)} \right) &P_{l-1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l+1)(2l+3)(2l+5) - (l+2)^2(2l+1) - (l+1)^2(2l+5)}{(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} + \frac{(l+1)l}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \right) &P_l^1 v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v}, \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} + \frac{(2l-1)(2l+1)(2l+3) - (l+1)^2(2l-1) - l^2(2l+3)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) &P_{l+1}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l(l+1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(2l-3)(2l-1)(2l+1) - l^2(2l-3) - (l-1)^2(2l+1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)} \right) &P_l^1 v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v}, \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l-2)(l-1)}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)} P_l^1 v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v}. \quad (\text{A16})$$

These Eqs. (A13)-(A16) are justified by the fact that f_l^s are none for $l < 0$.

Substituting Eqs. (A13)-(A16) into Eq. (A12), we well found the Eq. (13).

$$\sum_{l=0}^{\infty} v \frac{\partial f_l^s}{\partial v} (1 - \mu^2)^{3/2} P_l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^1 (G_1(l) v \frac{\partial f_{l-3}^s}{\partial v} + G_2(l) v \frac{\partial f_{l-1}^s}{\partial v} + G_3(l) v \frac{\partial f_{l+1}^s}{\partial v} + G_4(l) v \frac{\partial f_{l+3}^s}{\partial v}),$$

where

$$G_1(l) = \frac{(l-2)(l-1)}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)}, \quad G_2(l) = -\left(\frac{l(l+1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{(2l-3)(2l-1)(2l+1) - l^2(2l-3) - (l-1)^2(2l+1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)}\right),$$

$$G_3(l) = +\frac{(l+1)l}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \quad \text{and}$$

$$G_4(l) = -\frac{(l+3)(l+2)}{(2l+7)(2l+5)(2l+3)}.$$

Appendix B

In order to establish the equation (14), we use the following recurrence relations between associated Legendre polynomials which are demonstrated in (Ref. 21) for all order $l \geq 0$ and $0 \leq m \leq l$, thus:

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_l^m}{d\mu} = \frac{(l+1)(l+m)}{2l+1} P_{l-1}^m - \frac{l(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m, \quad (\text{B1})$$

$$\mu P_l^m = \frac{l+m}{2l+1} P_{l+1}^m - \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l-1}^m, \quad (\text{B2})$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l^m = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^{m+1} - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^{m+1}. \quad (\text{B3})$$

For $m=0$, these Eqs. are written as:

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l(l+1)}{2l+1} P_{l-1} - \frac{l(l+1)}{2l+1} P_{l+1}, \quad (\text{B4})$$

$$\mu P_l = \frac{l+1}{2l+1} P_{l-1} + \frac{l}{2l+1} P_{l+1}, \quad (\text{B5})$$

$$\sqrt{1 - \mu^2} P_l = \frac{1}{2l+1} P_{l-1}^1 - \frac{1}{2l+1} P_{l+1}^1. \quad (\text{B6})$$

Multiplying Eq. (B4) by μ , we get:

$$(1 - \mu^2) \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l(l+1)}{2l+1} \mu P_{l-1} - \frac{l(l+1)}{2l+1} \mu P_{l+1}. \quad (\text{B7})$$

Substituting Eq. (B5) in the right hand side of Eq. (B7) for $l \mapsto l-1$ and $l \mapsto l+1$, we then obtain:

$$(1 - \mu^2) \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l^2(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} P_{l-2} + \frac{l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} P_l - \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} P_{l+2}. \quad (\text{B8})$$

Multiplying Eq. (B8) by $\sqrt{1 - \mu^2}$, we get:

$$(1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l^2(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l-2} + \frac{l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_l - \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)} \sqrt{1 - \mu^2} P_{l+2}. \quad (\text{B9})$$

Using Eq. (B6) in the right hand side of Eq. (B9) for $l \mapsto l-2$, l and $l \mapsto l+1$, we obtain the following equation:

$$(1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{dP_l}{d\mu} = \frac{l^2(l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)} P_{l-3}^1 + \left(\frac{(2l-3)l(l+1)[(l-1)(2l+3) - (l+2)(2l-1)]}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{l^2(l+1)(2l+1)(2l+3)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l-1}^1 - \left(\frac{(2l+5)l(l+1)[(l-1)(2l+3) + (l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} + \right.$$

$$\frac{l(l+1)^2(2l-1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} P_{l+1}^1 + \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 \quad (\text{B10})$$

Multiplying this equation (B10) by f_l^S and taking the summing over all l , we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{\partial P_l}{\partial \mu} f_l^S &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{l^2(l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)} P_{l-3}^1 f_l^S + \left(\frac{(2l-3)l(l+1)[(l-1)(2l+3)-(l+2)(2l-1)]}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} - \right. \right. \\ &\left. \frac{l^2(l+1)(2l+1)(2l+3)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right) P_{l-1}^1 f_l^S - \left(\frac{(2l+5)l(l+1)[(l-1)(2l+3)+(l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} + \right. \\ &\left. \frac{l(l+1)^2(2l-1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} \right) P_{l+1}^1 f_l^S + \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 f_l^S \Big] \quad (\text{B11}) \end{aligned}$$

It is practical to shift the summation in the right hand side of this equation as follow:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^2(l+1)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)} P_{l-3}^1 f_l^S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+3)^2(l+4)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)} P_l^1 f_{l+3}^S, \quad (\text{B12})$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l-3)l(l+1)[(l-1)(2l+3)-(l+2)(2l-1)]}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{l^2(l+1)(2l+1)(2l+3)}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)} \right] P_{l-1}^1 f_l^S &= \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l-1)(l+1)(l+2)[l(2l+5)-(l+3)(2l+1)]}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} - \frac{(l+1)^2(l+2)(2l+3)(2l+5)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} \right] P_l^1 f_{l+1}^S, & \quad (\text{B13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l+5)l(l+1)[(l-1)(2l+3)+(l+2)(2l-1)]}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} + \frac{l(l+1)^2(2l-1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+1)^2(2l+3)(2l+5)} \right] P_{l+1}^1 f_l^S &= \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2l+3)(l-1)[(l-2)(2l+1)+(l+1)(2l-3)]}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)} + \right. \\ &\left. \frac{(l-1)l^2(2l-3)(2l-1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)} \right] P_l^1 f_{l-1}^S, \quad (\text{B14}) \end{aligned}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} P_{l+3}^1 f_l^S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l-3)(l-2)^2}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)} P_l^1 f_{l-3}^S. \quad (\text{B15})$$

Substituting Eqs. (B12)-(B15) into Eq. (B11), the Eq. (14) is well found.

$$\sum_{l=0}^{\infty} (1 - \mu^2)^{3/2} \mu \frac{\partial P_l}{\partial \mu} f_l^S = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^1 (G_5(l) f_{l-3}^S + G_6(l) f_{l-1}^S + G_7(l) f_{l+1}^S + G_8(l) f_{l+3}^S),$$

where

$$G_5(l) = \frac{(l-3)(l-2)^2}{(2l-5)(2l-3)(2l-1)}, \quad G_6(l) = -\frac{(2l+3)(l-1)[(l-2)(2l+1)+(l+1)(2l-3)]+(l-1)l^2(2l-3)(2l-1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)(2l+3)},$$

$$G_7(l) = \frac{(2l-1)(l+1)(l+2)[l(2l+5)-(l+3)(2l+1)]-(l+1)^2(l+2)(2l+3)(2l+5)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)} \quad \text{and}$$

$$G_8(l) = \frac{(l+3)^2(l+4)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)}.$$